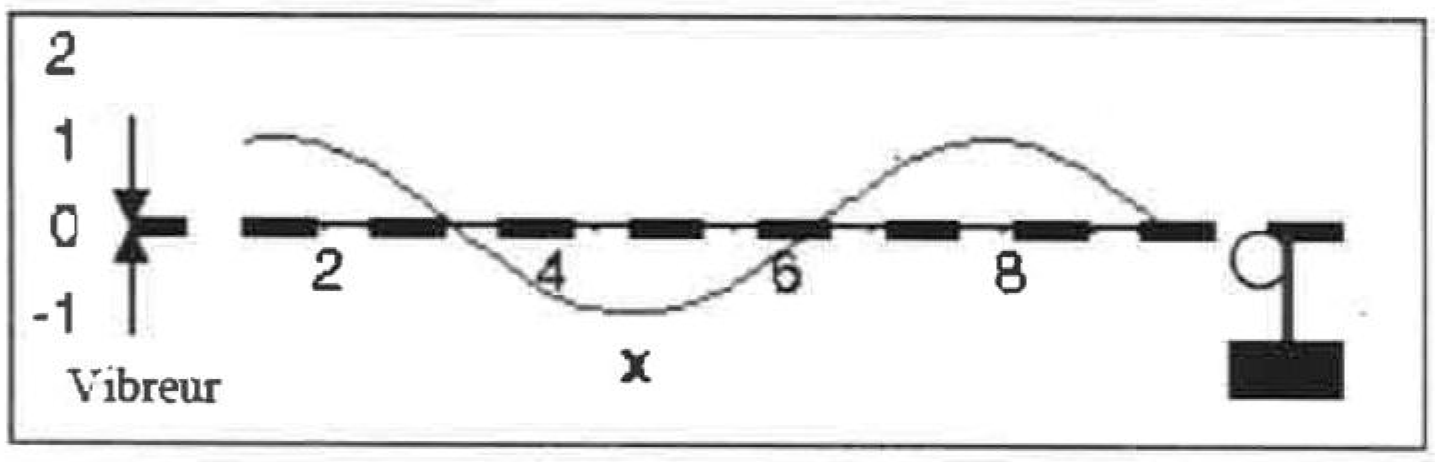
2014-2015 : CC2 Fonctions à plusieurs variables L2S4 Ingénierie

L2S4 – CC2 – Fonctions à plusieurs variables Mercredi 6 mai 2015

"L'avantage d'être intelligent, c'est qu'on peut toujours faire l'imbécile, alors que l'inverse est totalement impossible.", Woody Allen (1935-)

Equations aux dérivées partielles : Corde de Melde (1832-1901- physicien allemand). (12 points)

On considère une corde de longueur L. Elle est fixée en l'une de ses extrémités. En l'autre extrémité, un opérateur impose à la corde un mouvement sinusoïdal vertical.



En négligeant les frottements de l'air et le poids de la corde, le mouvement de la corde est décrit par l'équation des ondes. On note y(x, t) la hauteur de la corde en x à l'instant t. Le problème est ainsi modélisé par les équations suivantes :

- Équation des ondes : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \forall t, \forall x$
- Condition en x = L : $y(x = L, t) = 0, \forall t$
- Condition en x = 0 : $y(x = 0, t) = a.\sin(\omega t), \forall t$
- où ω est la pulsation de l'oscillation forcée et a est une constante petite devant L.

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions d'ondes stationnaires de ce problème. On considère donc une solution y de la forme $y(x,t) = U(x).V(t)$

Résolution par séparation des variables

(a) Montrer qu'il existe une constante réelle λ telle que $U'' = v^2 \lambda U, V'' = \lambda V$.

(b) En utilisant une des conditions au bord, déterminer l'expression de V (t). En déduire que $\lambda = -\omega^2$

(c) Résoudre l'équation satisfaite par U.

Pour la suite, on pourra utiliser le fait qu'une expression de la forme a cos(z)+b sin(z) où a, b et z sont des réels peut s'écrire sous la forme c sin(z + d), où c l'amplitude et d le déphasage sont des réels.

(d) Montrer que l'unique solution d'onde stationnaire du problème est la fonction

$$y(x,t) = U(x)V(t) = \frac{a\sin(\omega t)}{\sin(-\omega L / v)} \left[\sin(\frac{\omega(x-L)}{v}) \right]$$

Autre démarche possible : Injecter une solution complexe et garder la partie réelle comme solution : $\Psi(x,t) = A_1 \exp(i(\omega t - kx)) + A_2 \exp(i(\omega t + kx))$ *avec* $k = \omega / v$ (les constantes à déterminer sont liées aux conditions initiales et sont des complexes)

Question de réflexion
Pour quelles valeurs de pulsations le système est-il dégénérant ? (regarder le terme d'amplitude) et commentez par rapport aux hypothèses initiales.

Optimisation sous contraintes (8 points)

La compagnie péruvienne Koka produit et distribue une boisson gazeuse à base de feuilles énergisantes. Les contenants (canettes) ont une forme cylindrique de hauteur h et de rayon r. Afin de réduire les coûts, Koka veut minimiser la surface d'aluminium nécessaire à la construction des contenants. Cependant, ils doivent s'assurer qu'un contenant ait un volume de $128\pi\ cm^3$. Quelles sont les dimensions du contenant qui réalisent l'objectif et satisfont la contrainte ?

Démarche
Identifiez les variables du problème. Définissez ensuite la fonction de contrainte, et la fonction de base dont on cherche l'extremum. Résoudre ensuite par la méthode de multiplicateur de Lagrange le problème posé. Enfin proposez une méthode plus simple (réduction à une seule variable).