Licence 2 Ingénierie semestre 4 – Séries et transformées de Fourier

Contrôle continu n°2 - Mercredi 11 mai 2016

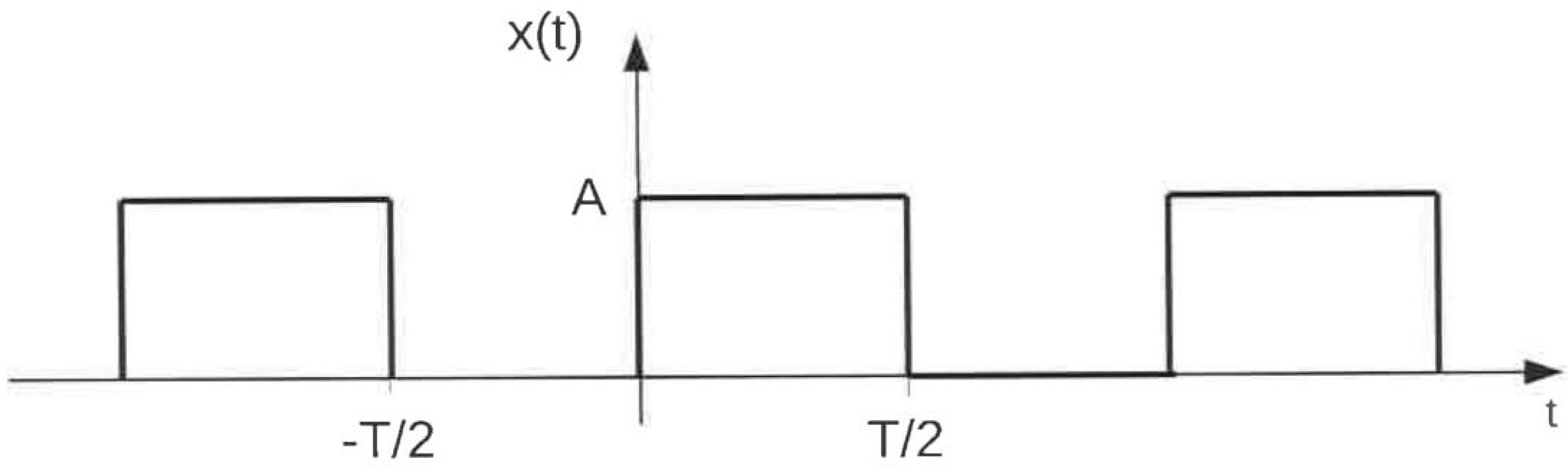
Durée : 1h

Seul le support de cours est autorisé

<u>Pour chacune des réponses aux questions il est impératif de détailler votre démarche</u>

<u>Exercice 1 :(4 points)</u>

On considère le signal périodique x(t)



1. Calculer les termes de la décomposition en série de Fourier de x(t) c'est à dire exprimer les termes a_n et/ou b_n.
2. Exprimer la décomposition en série de Fourier de x(t) en vous arrêtant au 6ème harmonique.

<u>Exercice 2 : (4 points)</u>

On considère le signal suivant : $f(t)=A\times t\times rect\left(\frac{t-T}{T}\right)$

1. Tracer le signal f(t)
2. Calculer l'énergie de f(t)
3. Calculer la puissance moyenne totale de f(t)

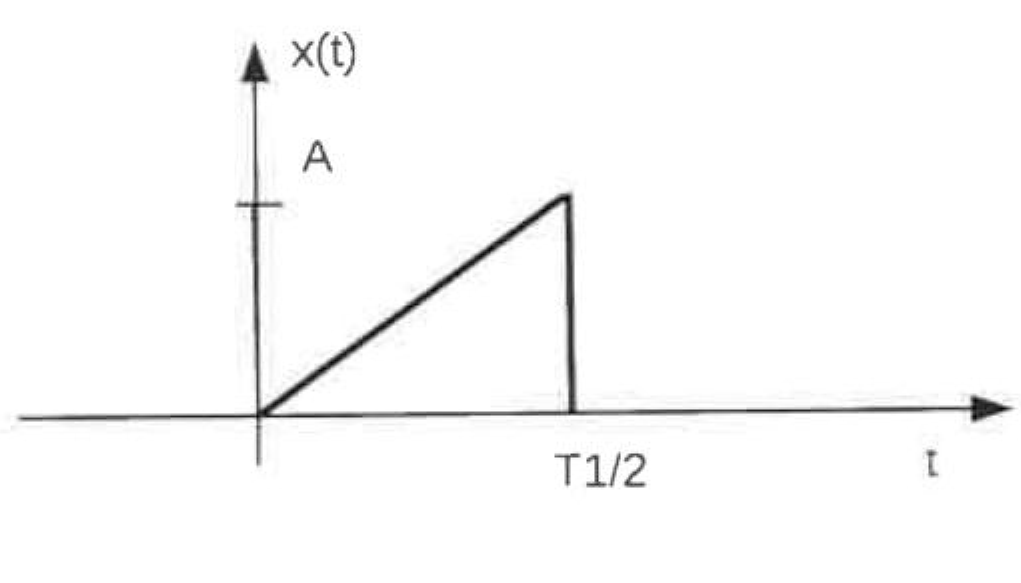
<u>Exercice 3 : (4 points)</u>

Sachant que la transformée de Fourier de 1 est égale à $\delta(f)$ (donc $TF[1]=\delta(f)$) :

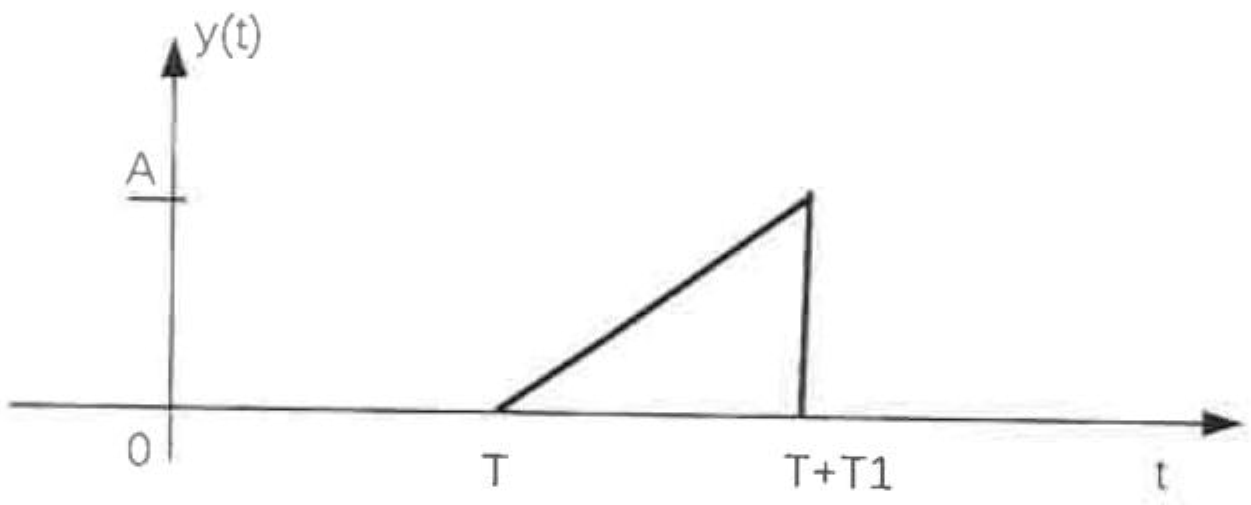
1. Exprimer $\delta(f)$
2. En déduire la transformée de Fourier du signal $y(t)=\sin(2\pi f_1 t)$ en fonction de $\delta(f)$. Expliquer votre démarche

<u>Exercice 4 : (8 points)</u>

Considérons le signal **non périodique** x(t) suivant :



1. Calculer l'énergie du signal x(t)
2. Calculer la transformée de Fourier du signal x(t)
3. En déduire la transformée de Fourier du signal non périodique y(t) suivant :



TRIGONOMÉTRIE : FORMULAIRE

Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$

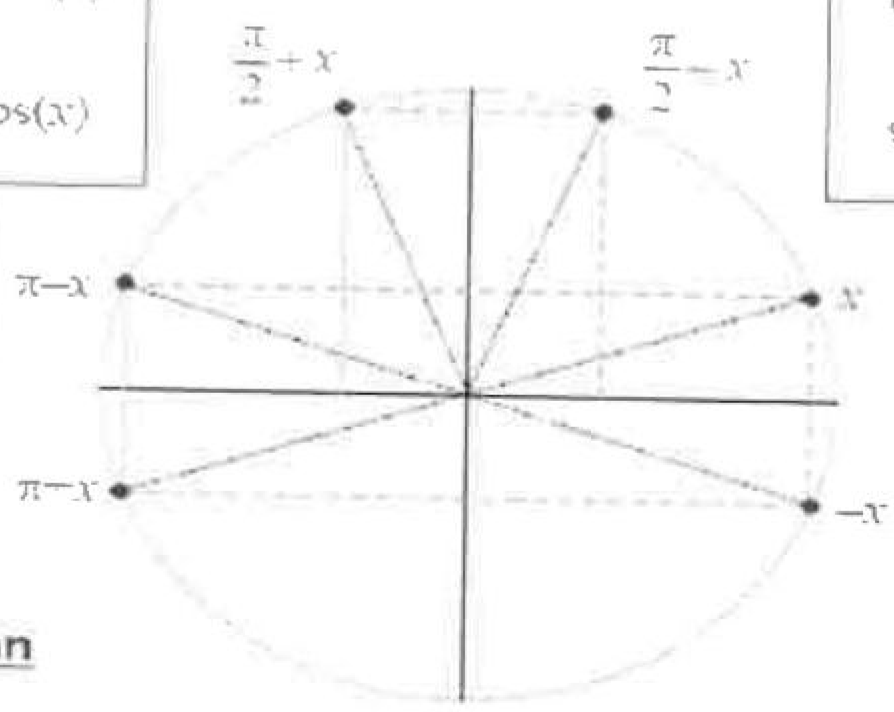
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi - x) = \sin(x)$



$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules d'addition

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

Extensions : $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$ $\quad \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$ $\quad \tan(3a) = \frac{3\tan(a)-\tan^3(a)}{1-3\tan^2(a)}$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad \tan^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a)+3\cos(a)}{4}$ $\quad \sin^3(a) = \frac{-\sin(3a)+3\sin(a)}{4}$ $\quad \tan^3(a) = \frac{-\sin(3a)+3\sin(a)}{\cos(3a)+3\cos(a)}$

Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)] \qquad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)] \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Formule d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

Dérivée de sinx = cosx