

Licence 2 Ingénierie semestre 4 – Séries et transformées de Fourier

Session 2 - Mardi 16 juin 2015

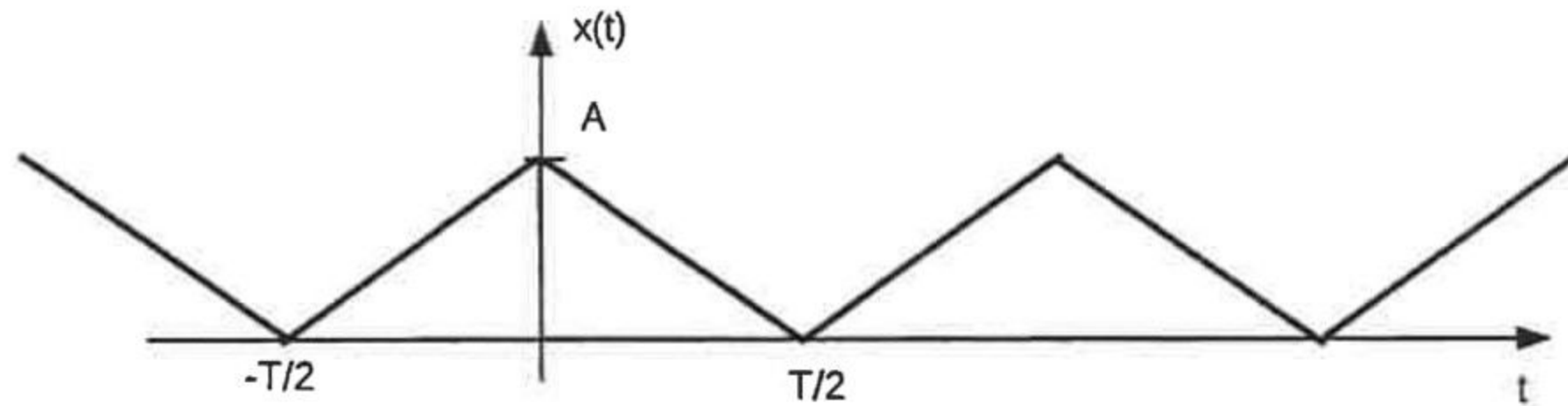
Durée : 1h

Seul le support de cours est autorisé

Pour chacune des réponses aux questions il est impératif de détailler votre démarche.

Exercice 1 : (5 points)

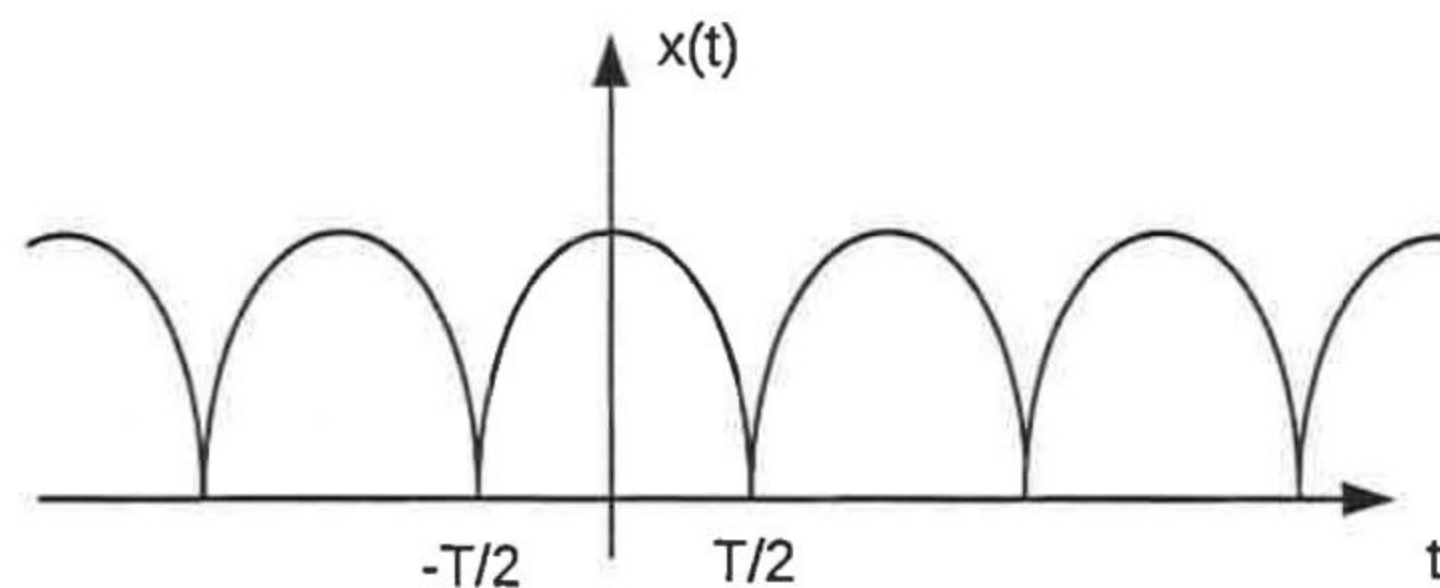
On considère le signal périodique $x(t)$



1. Calculer les termes de la décomposition en série de Fourier de $x(t)$ c'est à dire exprimer les termes a_n et/ou b_n .
2. Exprimer la décomposition en série de Fourier de $x(t)$ en vous arrêtant au 6ème harmonique.

Exercice 2 : (5 points)

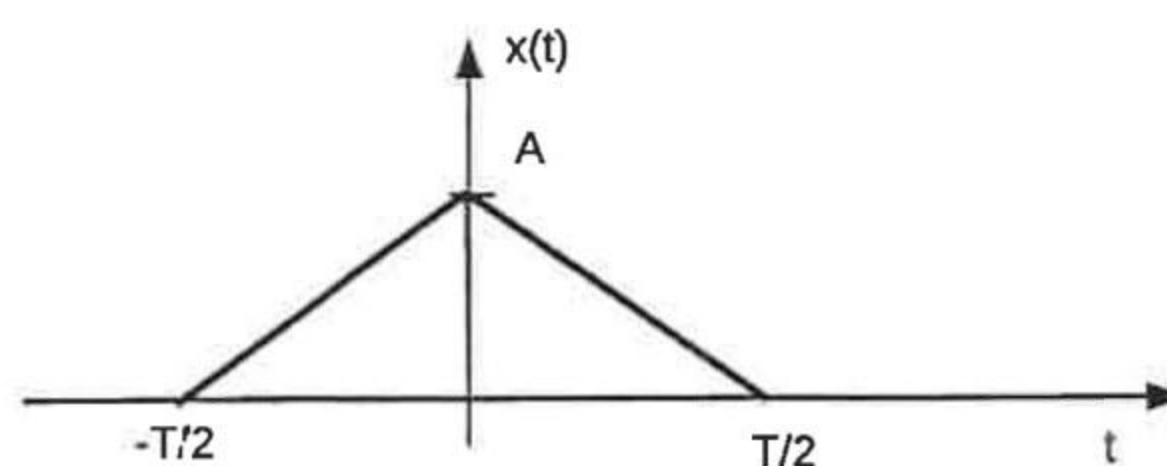
On suppose que le signal $x(t)$ suivant est obtenu à partir d'un signal sinusoïdal (sinus ou cosinus).



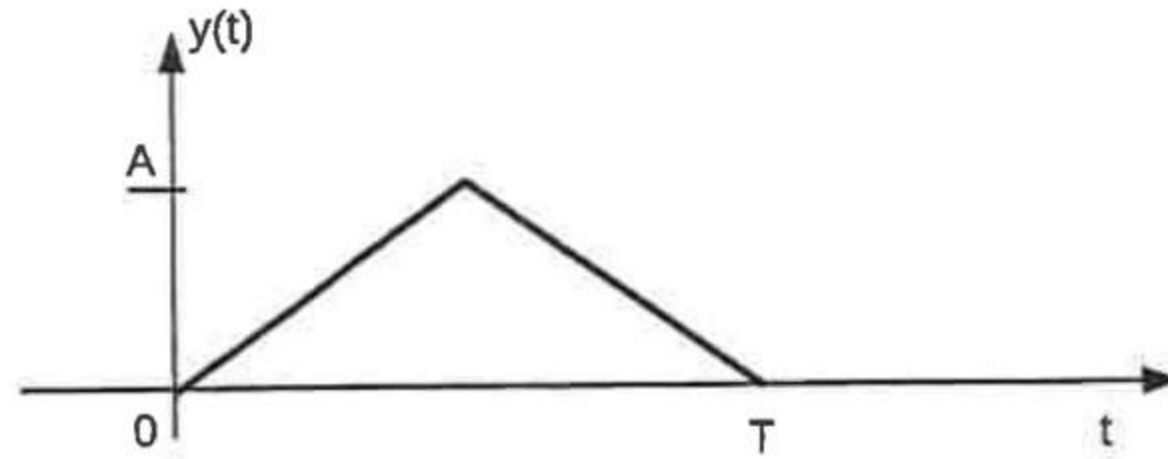
1. Donner l'expression du signal $x(t)$ sur l'intervalle $[-T/2 ; T/2]$.
2. Calculer les termes de la décomposition en série de Fourier de $x(t)$ c'est à dire exprimer les termes a_n et/ou b_n .
3. Exprimer la décomposition en série de Fourier de $x(t)$ en vous arrêtant au 5ème harmonique.

Exercice 3 : (10 points)

Considérons le signal **non périodique** $x(t)$ suivant :



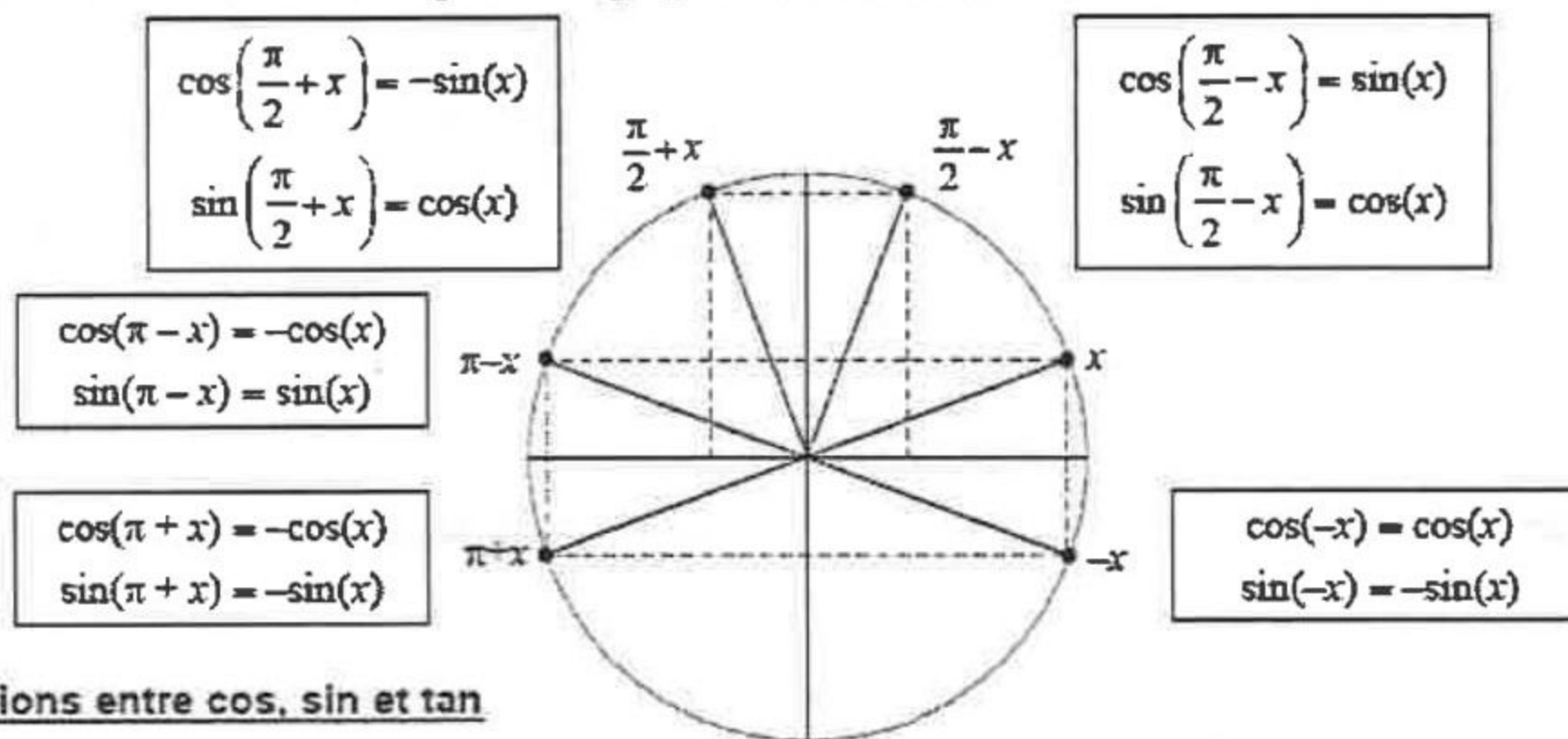
1. Calculer l'énergie et la puissance moyenne du signal $x(t)$
2. Calculer la transformée de Fourier du signal $x(t)$
3. En déduire la transformée de Fourier du signal non périodique $y(t)$ suivant :



TRIGONOMETRIE : FORMULAIRE

Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :



Relations entre cos, sin et tan

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Formules d'addition

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Extensions : $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$

$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

$$\tan(3a) = \frac{3\tan(a) - \tan^3(a)}{1 - 3\tan^2(a)}$$

Au delà, utiliser la formule de Moivre.

Formules de linéarisation

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Extensions : $\cos^3(a) = \frac{\cos(3a) + 3\cos(a)}{4}$

$$\sin^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{4}$$

$$\tan^3(a) = \frac{-\sin(3a) + 3\sin(a)}{\cos(3a) + 3\cos(a)}$$

Au delà, utiliser les formules d'Euler. Les formules d'Euler permettent également de montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \quad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$