25 novembre 2015

Licence de Physique 3ème année - Contrôle continu
Épreuve de mécanique quantique.
Aucun document n'est autorisé - Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Les exercices sont indépendants - Durée de l'épreuve : 1 heure.

Exercice I

Une particule de masse m, d'énergie E, astreinte à se déplacer le long d'un axe Ox est soumise au potentiel $V(x)$ défini par

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{(région I)} \\ V_2 & \text{si} \quad L \leq x \quad \text{(région II)} \end{cases}$$

où V_2 et L sont des constantes strictement positives.
Dans tout l'exercice, on se limite au cas où $E > 0$.

1. Donner, en fonction de E, l'expression générale de la fonction d'onde de la particule dans les régions I et II.
2. Quelle condition doit vérifier l'énergie E pour que l'état de la particule soit un état lié ?
3. On considère dans cette partie, le cas d'un *état lié*.
   a) Quelles conditions doit vérifier la fonction d'onde en 0 et en $+\infty$? Simplifiez les expressions de la question 1.
   b) Écrire les conditions de raccordement en $x = L$.
   c) En déduire l'équation conduisant à la quantification de l'énergie (On ne cherche pas à la résoudre)
4. On s'intéresse maintenant au cas d'un *état non lié* (état de diffusion).
   a) Quelle forme prend maintenant la fonction d'onde dans la région II ?
   b) Écrire les conditions de raccordement en $x = L$.
   c) L'énergie est-elle encore quantifiée ?

Exercice II

On considère un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de pulsation ω. Son hamiltonien $\hat{H}$ est donné par

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

où $\hat{p}$ et $\hat{x}$ désignent respectivement les opérateurs impulsion et position.

On note $\Psi(x,t)$, la fonction d'onde de l'oscillateur au temps t et on suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$),

$$\Psi(x,0) = c\left[1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right] e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

où c est une constante et $x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$.

1. Déterminer la constante c.
2. Donner la fonction d'onde $\Psi(x,t)$ à un instant t, avec $t > 0$.
3. En supposant $t > 0$, quels peuvent être les résultats possibles d'une mesure de l'énergie de cet oscillateur et avec quelles probabilités peut-on obtenir ces résultats ?
4. Calculer la valeur moyenne de l'énergie de cet oscillateur pour $t > 0$.
5. Calculer $\langle \hat{x} \rangle(t)$, la valeur moyenne de l'opérateur position, la fonction d'onde de l'oscillateur étant $\Psi(x,t)$.
6. En déduire $\langle \hat{p} \rangle(t)$ la valeur moyenne de l'opérateur impulsion.

Rappel :
Soient $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension, de masse m et de fréquence ω, et $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ les énergies propres associées.
On a

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{2}{x_0\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{x_0}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{1}{2x_0\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1\right] e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = N_n e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

où $N_n = \left(\frac{1}{2^n n! x_0\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}$ est une constante avec $x_0 = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}$ et $H_n(x)$ sont les polynômes d'Hermite.
On rappelle que toute fonction normalisable peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $\varphi_n(x)$.