Physique et Ingénierie

13 Janvier 2016

Licence de Physique 3ème année - Contrôle continu
Épreuve de mécanique quantique.
Aucun document n'est autorisé - Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Durée de l'épreuve : 2 heures.

A - Oscillateur harmonique

Le hamiltonien $\hat{H}$ d'un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de fréquence ω se met sous la forme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ représentent respectivement les opérateurs position et impulsion qui vérifient la relation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. On définit l'opérateur

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

A-1 Montrer la relation : $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

A-2 On définit l'opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$.

a) Montrer que $\hat{N}$ est hermitique

b) On note $|n\rangle$ le vecteur propre de $\hat{N}$ associé à la valeur propre n. En partant de la définition d'un opérateur hermitique, montrer que n est un nombre réel.

c) Montrer que n est un nombre positif ou nul.

d) Montrer que les états $|n\rangle$ sont aussi vecteurs propres de $\hat{H}$ et déterminer la valeur propre correspondante E_n.

A-3 Calculer les commutateurs $[\hat{N}, \hat{a}]$ et $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$

A-4 Montrer les relations : $\hat{N}\left(\hat{a}^\dagger|n\rangle\right) = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle$ et $\hat{N}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = (n-1)\hat{a}|n\rangle$.

A-5 En effectuant un choix de phase convenable et en calculant $||\hat{a}|n\rangle||$, montrer que

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

A-6 Calculer $\hat{a}^\dagger|n\rangle$. On notera que le choix de phase effectué à la question précédente est définitif. En conséquence, il faut donc établir $\hat{a}^\dagger|n\rangle$ par un calcul direct sans passer par le calcul d'une norme.

A-7 En appliquant l'opérateur $\hat{a}$ de manière itérative à un ket $|n\rangle$, montrer que n est un entier.

A-8 D'après les questions précédentes, $\hat{a}|0\rangle = 0$. Établir l'équation différentielle donnant la fonction $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ et donner sa solution.

A-9 Calculer $\psi_1(x)$, la fonction d'onde du premier état excité.

Rappel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ où a est un nombre réel strictement positif.

B - État comprimés de l'oscillateur harmonique

I - Préliminaires

Soit l'opérateur $\hat{f}(t)$ fonction du paramètre t

$$\hat{f}(t) = \mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-t\hat{A}}$$

où $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont deux opérateurs.

B-I-1 Montrer que $\dfrac{d\hat{f}}{dt} = [\hat{A}, \hat{f}(t)]$, $\quad \dfrac{d^2\hat{f}}{dt^2} = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{f}(t)]]$, $\quad$ etc...

B-I-2 En déduire $\mathrm{e}^{t\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-t\hat{A}} = \hat{B} + \dfrac{t}{1!}[\hat{A}, \hat{B}] + \dfrac{t^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \ldots$

II - États comprimés

On considère l'opérateur $\hat{S} = \dfrac{r}{2}\left(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2}\right)$ où r est un nombre réel et $\hat{a}$ et $\hat{a^{\dagger}}$ sont les opérateurs d'annihilation et de création précédemment définis dans la partie A.

B-II-1 Calculer les commutateurs $[\hat{a}, \hat{S}]$ et $[\hat{a}^{\dagger}, \hat{S}]$. (*On rappelle (A-1) que* $[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$.)

B-II-2 Soit l'opérateur $\hat{T}(r) = \mathrm{e}^{\hat{S}}$. Montrer que $\hat{T}(r)$ est un opérateur unitaire.

B-II-3 Un état comprimé est défini à partir de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique par la relation $|r\rangle = \hat{T}(r)|0\rangle$ Pour déterminer ses propriétés, il est nécessaire de construire l'opérateur $\hat{b}(r) = \hat{T}^{\dagger}(r)\hat{a}\hat{T}(r)$.

a) Calculer le commutateur $[\hat{b}(r), \hat{b}^{\dagger}(r)]$.

b) Établir la relation $\hat{b}(r) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^{\dagger}\sinh r$.

B-II-4 On suppose l'oscillateur préparé dans l'état $|r\rangle$, calculer les valeurs moyennes $\langle\hat{a}\rangle$, $\langle\hat{a}^{\dagger}\rangle$, $\langle\hat{a}^2\rangle$, $\langle(\hat{a}^{\dagger})^2\rangle$, $\langle\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\rangle$ et $\langle\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\rangle$.

B-II-5 L'oscillateur étant dans l'état $|r\rangle$, calculer les écarts quadratiques moyens $\Delta\hat{x}$ et $\Delta\hat{p}$ des opérateurs position et impulsion.

B-II-6 Commenter la valeur du produit $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p}$. Justifier l'appelation d'état comprimé.

Rappel :

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$