Licence de physique – L3
Mécanique Quantique
Contrôle continu 2011
Documents, calculatrice et téléphone portable interdits

Exercice 1

On considère, dans un problème à une dimension, l'hamiltonien H d'une particule, défini par:

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(X)$$

où X et P sont respectivement les opérateurs position et impulsion et qui vérifient la relation:

$$[X, P] = i\hbar.$$

Les vecteurs propres de H sont désignés par $|\phi_n\rangle$: $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$ où n est un indice discret.

1 Montrer que:

$$\langle\phi_n|P|\phi_{n'}\rangle = \alpha\langle\phi_n|X|\phi_{n'}\rangle$$

où α est un coefficient à déterminer (on pourra considérer le commutateur $[X, H]$).

2 En déduire, en utilisant la relation de fermeture, l'égalité :

$$\sum_{n'}(E_n - E_{n'})^2\left|\langle\phi_n|X|\phi_{n'}\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle\phi_n|P^2|\phi_n\rangle$$

Exercice 2

On considère une particule de masse m, soumise au potentiel:

$$\begin{array}{lcc} V(x) = 0 & \text{si} & 0 \leq x \leq a \\ V(x) = +\infty & \text{si} & x < 0 \text{ ou } x > a \end{array}$$

On appelle $|\phi_n\rangle$ les états propres de l'hamiltonien H du système, de valeurs propres $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. L'état de la particule à l'instant $t = 0$ est:

$$|\psi(0)\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle$$

1 Quelle est la probabilité, lorsque l'on mesure l'énergie de la particule dans l'etat $|\psi(0)\rangle$, de trouver une valeur inférieure à $\frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$?

2 Quelle est la valeur moyenne de l'énergie de la particule dans l'état $|\psi(0)\rangle$?

3 Calculer le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant t. Les résultats trouvés en **1** et **2** restent-ils exacts à un instant t quelconque ?

4 Lors d'une mesure de l'énergie, on trouve le résultat $\frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$. Après la mesure, quel est l'état du système ? Que trouve-t-on si on mesure à nouveau l'énergie ?

Exercice 3

Soient $|\nu_1>$ et $|\nu_2>$ deux états propres normalisés du hamiltonien :

$$H|\nu_i>= E_i|\nu_i>,$$

$E_1 \neq E_2$. On suppose que les états physiques observables sont donnés par

$$\begin{aligned} |\nu_e> &= \quad |\nu_1> \cos\theta + |\nu_2> \sin\theta, \\ |\nu_\mu> &= -|\nu_1> \sin\theta + |\nu_2> \cos\theta. \end{aligned}$$

1 Montrer que $|\nu_e>$ et $|\nu_\mu>$ sont normalisés et orthogonaux.
2 On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le système est dans l'état $|\nu_\mu>$.
a Dans quel état le système se trouve-t-il à une instant ultérieur $t > 0$?
b Quelle est la probabilité pour que le système se trouve dans l'état $|\nu_e>$ à la date $t > 0$?

Exercice 4

On considère la fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|+i\omega t},$$

où A, λ et ω sont des constantes positives.
1 Normaliser ψ.
2 Calculer $\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$.
3 Quelle est la probabilité pour que $|x| > \Delta x$?

Exercice 5

On se propose d'étudier les niveaux d'énergie d'une particule de neutron de masse m dans le champ de gravitation à la surface de la terre. On suppose pour simplifier, que le problème est une dimension, c'est à dire que la particule est astreinte à se déplacer seulement suivant l'axe Oz et dans le potentiel suivant:

$$\begin{cases} V(z) = \infty \quad \text{pour} \quad z < 0 \\ V(z) = mgz \quad \text{pour} \quad z \geq 0 \end{cases}$$

1 Ecrire l'équation aux valeurs propres de la particule. on notera E_n et $\phi_n(z)$ les énergies propres et les fonctions propres.
1 Donner les conditions aux limites que doivent satisfaire les fonctions propres en $z = 0$ et en $z = \infty$.
3 En posant $z = z_0 x$ et $E = E_0\epsilon$, ramener l'équation aux valeurs propres une équation à variable sans dimensions de la forme:

$$-\phi''(x) + x\phi(x) = \epsilon\phi(x)$$

Donner les valeurs de z_0 et de E_0.
4 Sachant que les solutions de l'équation differentielle suivante:

$$f''(\eta) - \eta f(\eta) = 0$$

sont des fonctions spéciales d'Airy qui se mettent sous la forme:

$$f(\eta) = CAi(\eta)$$

(la constante C et la fonction Ai ne doivent pas être explicitées) s'annulant pour $n \longrightarrow \infty$ et pouvant être représentées sur la figure 1 ci-dessous, on demande de déterminer les niveaux d'énergies de E_n de la particule (masse du neutron: $m_n = 1675.10^{-27} kg$).

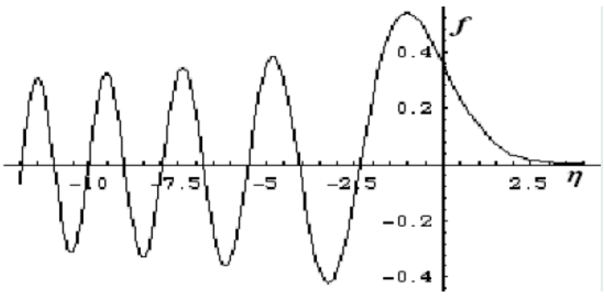

Figure 1:

Exercice 6

La molécule d'ammoniac NH_3 est formée de trois atomes d'hydrogène H situées aux sommets d'un triangle équilatéral et d'un atome d'azote N située sur l'axe du triangle à une distance x du plan des hydrogènes. On néglige le mouvement des atomes d'hydrogène dans leur plan et on ne s'intéresse qu'au mouvement d'ensemble du plan des hydrogènes par rapport à l'atome d'azote. On est donc ramené à un problème à une dimension, le seul paramètre étant la distance x entre l'azote pris comme origine (fixe) et le centre de gravité G mobile des atomes d'hydrogène. L'énergie potentielle d'interaction $W(x)$ entre les atomes d'azote et d'hydrogène est représentée sur la figure 2 . Pour simplifier, nous pouvons remplacer le potentiel W(x) par le potentiel V(x) representé sur la figure 2.

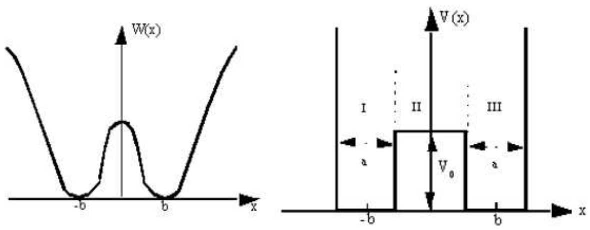

Figure 2:

Le problème se ramène donc à l'étude d'une particule unique, de masse m, mobile dans le potentiel V(x) défini par

$$\begin{cases} V(z) = 0 \quad -b - \frac{a}{2} < x < -b + \frac{a}{2} \\ V(z) = V_0 \quad -b + \frac{a}{2} < x < b - \frac{a}{2} \\ V(z) = 0 \quad b - \frac{a}{2} < x < b + \frac{a}{2} \\ V(z) = \infty \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

On s'intéressera dans la suite au cas $E < V_0$ et aux fonctions paires.
1 Ecrire l'équation de schodinger dans les diffrentes régions.
2 Montrer ques les fonctions d'onde de la particule dans les trois régions sont de la forme:

$$\begin{cases} \Psi_I(x) = Asink(b + \frac{a}{2} + x) \\ \Psi_{II}(x) = Bch(\rho x) \\ \Psi_{III}(x) = Csink(b + \frac{a}{2} - x) \end{cases}$$

Expliciter k, ρ en fonction de E, m et de V_0
3 En dérivant les conditions de continuité, montrer que les conditions de quantification de l'énergie sont données par:

$$tgka = -\,coth\rho(b - \frac{a}{2})$$

Exercice 7

En présence d'un champ magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ et d'un champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, l'équation de Schrödinger pour une particule de charge q prend la forme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\vec{A} \right)^2 + q\phi \right] \psi(\vec{r}, t).$$

Déduire l'expression du courant de probabilité de présence des potentiels scalaire et vecteur.

On fait subir la transformation suivante àla fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t) \to \tilde{\psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)e^{-i\chi(\vec{r}, t)}$. Montrer que $\tilde{\psi}(\vec{r}, t)$ obeit à une équation de Schrödinger de la même forme, pour les nouveaux potentiels $\tilde{\vec{A}}$ et $\tilde{\phi}$. Quels sont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ correspondants ? A quoi correspond la transformation des potentiels ?

Exercice 8

- Soit une fonction d'onde gaussienne $\varphi(x) = \frac{1}{(\pi a^2)^{1/4}} e^{-x^2/2a^2}$. Calculer Δx, Δp_x puis vérifier que le produit satisfait l'inegalité d'Heisenberg.

- Mêmes questions pour les états stationnaires du puits infini: $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(\frac{n\pi x}{a})$ pour $x \in [0, a]$ et nulle ailleurs.

Exercice 9

1. Montrer que la conservation dans le temps de la norme d'une fonction d'onde impose l'hérmiticité de l'opérateur Hamiltonien. Pour cela on utilisera la définition de la norme, et le fait que Ψ et Ψ^* sont respectivement solutions de l'équation de Schrodinger et de sa conjugée.

2. Sachant que la représentation d'un état $|\mathbf{p}\rangle$ où une particule a une quantité de mouvement déterminée $\mathbf{p}$ est :

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = A \exp\left(i\frac{\mathbf{p}.\mathbf{x}}{\hbar}\right),$$

déterminer la valeur de la constante de normalisation A pour que la relation $\langle \mathbf{p}'|\mathbf{p}\rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ soit satisfaite.
On donne :

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{x} \mathrm{e}^{-i\left(\frac{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}{\hbar}\right)\mathbf{x}} = (2\pi)^3\hbar^3\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}),$$

on choisira A réel et positif.

Exercice 10

Soit un opérateur α ayant une base propre orthonormée complète, mais dont les valeurs propres sont complexes:

$$\alpha\phi_i = a_i\phi_i$$
$$\langle \phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$$

- Montrer que ϕ_i est fonction propre de $\alpha^\dagger$ avec pour valeur propre a_i^*.
- Montrer que α et $\alpha^\dagger$ commutent.
- Si on décompose α en parties hermitique et antihermitique, $p + iq$, montrer que p et$q$ commutent.

On considère mainteant α comme étant unitaire :

$$\alpha\alpha^\dagger = 1$$

- Montrer que les a_i sont de module 1.
- Montrer que deux fonctions propres associées à deux valeurs propres différentes sont orthogonales.