L3/STU et M1

Module: Mécanique Quantique

Examen, épreuve de janvier 2006, durée 3 h
Documents autorisés

1 Fonction d'onde en représentation "p"

1.1 A

Soit la fonction d'onde en quantité de mouvement

$$\hat{\Psi}(p) = Ne^{-a^2p^2/2\hbar^2} \tag{1}$$

1. Quelle est la fonction d'onde spatiale $\Psi(x)$ correspondante ?
2. En imposant la normalisation de $\Psi(x)$, calculer la valeur de la constante A dans les transformations de Fourier réciproques entre $\Psi(x)$ et $\hat{\Psi}(p)$ (valeur valable pour toutes les fonctions d'onde).

$$\Psi(x) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar}\hat{\Psi}(p)dp \tag{2}$$

$$\hat{\Psi}(p) = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx/\hbar}\Psi(x)dx \tag{3}$$

1.2 B

Exprimer à partir de $\hat{\Psi}$ les fonctions d'onde en quantité de mouvement correspondant à la fonction d'onde spatiale modifiée par les transformations suivantes:

1. $\Psi'(x) = \Psi(x-a)$ (translation)
2. $\Psi''(x) = e^{iqx/\hbar}\ \Psi(x)$ (modulation)
3. $\Psi'''(x) = \sqrt{\lambda}\ \Psi(\lambda x)$, $\lambda > 0$ (dilatation)

On vérifira d'abord que les fonctions d'onde modifiées sont bien normalisées.
On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

2 Oscillateur harmonique isotrope à 2D

On considère un oscillateur harmonique isotrope à deux dimensions ayant pour hamiltonien

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\vec{r}^2 \tag{4}$$

1. On introduit les opérateurs créations et anihilations

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}p_x\right)\\
a_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y + i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}p_y\right)\\
a_x^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}p_x\right)\\
a_y^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y - i\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}p_y\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

   Calculer les commutateurs $[a_x, a_x^\dagger]$, $[a_y, a_y^\dagger]$. Vérifier que $[a_x, a_y] = [a_x^\dagger, a_y^\dagger] = 0$.

2. Exprimer le Hamiltonien en fonction de $(a_x^\dagger, a_x)$ et $(a_y^\dagger, a_y)$.

3. En utilisant les résultats obtenus en cours pour l'oscillateur harmonique à une dimension, en déduire les trois premiers états d'énergies de ce système et leur dégénérescence; écrire les kets propres associés à ces valeurs propres en utilisant les nombres quantiques n_x et n_y.

4. On introduit l'opérateur moment cinétique, et plus particulièrement sa composante sur l'axe z: $L_z = xp_y - yp_x$. Ecrire L_z en fonction de $(a_x^\dagger, a_x)$ et $(a_y^\dagger, a_y)$.

5. Montrer que L_z commute avec H.

6. On introduit les opérateurs

$$\begin{aligned}
a_d &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y)\\
a_g &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y)
\end{aligned}$$

   Donner les expressions de $a_d^\dagger$ et $a_g^\dagger$, et vérifier que les relations de commutations ont la même forme que pour les opérateurs création et annihilation usuels.

7. On pose $N_d = a_d^\dagger a_d$ et $N_g = a_g^\dagger a_g$. Réécrire le Hamiltonien et le moment cinétique L en fonction de N_d et N_g.

8. En déduire les valeurs propres du Hamiltonien et de L, puis classer les 3 premiers états en fonction des nombres quantiques $n = n_d + n_g$ et $m = n_d - n_g$. Quelle-est la signification de n_d et n_g ?

3 Mesure

On considère un système physique dont l'espace des états, à 3 dimensions, est rapporté à une base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. On considère deux opérateurs L_z et S définis par: $L_z|u_1\rangle = |u_1\rangle$, $L_z|u_2\rangle = 0$, $L_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle$, $S|u_1\rangle = |u_3\rangle$, $S|u_2\rangle = |u_2\rangle$, $S|u_3\rangle = |u_1\rangle$.

1. Ecrire les matrices représentant dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, les opérateurs L_z, L_z^2, S, S^2. Ces opérateurs peuvent-ils être associés à des grandeurs physiques ?

2. Montrer que L_z^2 et S ont une base de vecteurs propres commune. Déterminer cette base. Que peut-on dire des grandeurs associées à L_z^2 et S ?

3. Le système est alors dans un état $|\psi\rangle$ donné par:

$$|\psi\rangle = \alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle + \alpha_3|u_3\rangle.$$

   On mesure la grandeur physique associée à L_z. Quelles valeurs peut-on trouver, et avec quelles probabilités ?

4. Même question pour les grandeurs physiques associées à L_z^2, S et S^2.

4 Histoire des Sciences

Développer en quelques phrases: la première phase de la mécanique quantique.