Université de Strasbourg 22 novembre 2016

Année universitaire 2016/2017

**Licence Physique – 3ème année – Semestre 5**

**TECHNIQUES MATHEMATIQUES POUR LA PHYSIQUE – Contrôle Continu Numéro 1**

*Aucun document n'est autorisé – Durée de l'épreuve : 1H30*

## EXERCICE I

1. Rappeler la définition du produit scalaire hermitien et celle de la norme associée.
2. Donner la définition d'un espace préhilbertien et celle d'un espace de Hilbert.
3. Rappeler, sans démonstration, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Minkowski (inégalité du triangle).
4. Par la suite, on désignera par $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ; les notations pour le produit scalaire et la norme seront celles du cours. Montrer que pour tout $\phi$ et tout $\psi$ de $\mathcal{H}$, on a l'*identité de polarisation* :
$$\langle\phi|\psi\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|\phi+\psi\|^2 - \|\phi-\psi\|^2\Big) \tag{1}$$
5. De même, montrer que pour tout $\phi$ et tout $\psi$ de $\mathcal{H}$, on a l'*identité du parallélogramme* :
$$\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2 = 2\Big(\|\phi\|^2 + \|\psi\|^2\Big) \tag{2}$$
6. Soit $U$ une *isométrie*. Cette opération linéaire, de $\mathcal{H}$ dans lui-même, conserve la norme, c.-à-d. que pour tout $\phi$ de $\mathcal{H}$, on a $\|U(\phi)\| = \|\phi\|$.
   (a) À l'aide de l'identité de polarisation, montrer que si $U$ conserve la norme et est linéaire, alors $U$ conserve également le produit scalaire.
   (b) Montrer que si $U$ conserve le produit scalaire, alors $U$ conserve la norme.
   (c) En développant, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrairement choisi, l'expression $\|U(\phi+\lambda\psi) - U(\phi) - \lambda U(\psi)\|^2$, montrer la linéarité de $U$, si $U$ conserve le produit scalaire.

## EXERCICE II

Soit $H(x)$ la fonction de Heaviside, nulle si $x < 0$ et égale à 1 si $x \geqslant 0$.
On définit la distribution $T = \dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^n}{dx^n}\Big(H(x)\,x^{n-1}\Big)$ pour $n \geqslant 1$ donné.

1. La fonction $H(x)$ définit-elle une distribution régulière ?
2. Même question pour la fonction $H(x)\,x^{n-1}$.
3. La fonction $H(x)$ est-elle dérivable ?
4. Que vaut la distribution $T$ pour $n = 1$ ?
5. Pour une valeur de $n$ donnée et une fonction test arbitraire $\varphi$, exprimer $\langle T, \varphi\rangle$ en fonction de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)\,dx$.
6. En effectuant une intégration par parties, exprimer $I_n$ en fonction de $I_{n-1}$ (pour $n \geqslant 2$), puis en déduire l'expression de $I_n$ en fonction de $I_1$.
7. Donner l'expression de $T$ pour $n$ donné.