Correction du contrôle du 20 octobre EC11

1. $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{Var}\,X = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{12}}$

2. Conjugaison : on cherche $Y = aX + b$ où $\mathbb{E}(Y) = \underline{\underline{6}}$ et $\mathrm{Var}\,Y = 3$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + b = \frac{a}{2} + b$$

car $\mathbb{E}(b) = b$ et $\mathbb{E}$ est linéaire

Attention ! Var n'est pas linéaire

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX+b) = \mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X) = \frac{a^2}{12}$$

en effet $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathbb{E}\left(\left[(aX+b) - \mathbb{E}(aX+b)\right]^2\right)$

mais $\left[(aX+b) - \mathbb{E}(aX+b)\right] = aX - \mathbb{E}(aX)$

donc $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 6 \\ \frac{a^2}{12} = 3 \end{cases}$$

et si on se limite à $a > 0$ on trouve

$\boxed{a = 6 \text{ et } b = 3}$

Remarque : $a = -6$ et $b = 10$ donnerait $\tilde{Y} = -6X + 10$ dont la loi est la même que $Y = 6X + 3$

3. $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(6X+3 \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t}{6} - \frac{1}{2}\right)$
$= F_X\left(t/6 - 1/2\right)$

cela dépend de $\frac{t}{6} - \frac{1}{2}$ car $F_X(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } t/6 - 1/2 \leq 0 \\ t/6 - 1/2 & \text{si } t/6 - 1/2 \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t/6 - \frac{1}{2} \geq 1 \end{cases}$

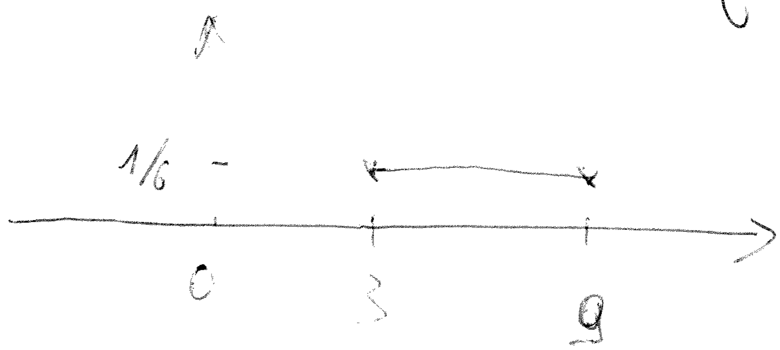
avec $u = t/6 - 1/2$

La condition $t/6 - 1/2 \in [0,1]$ est en fait $t \in [3,9]$

si bien que, $\boxed{F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 3 \\ \frac{t}{6} - \frac{1}{2} & \text{si } t \in [3,9] \\ 1 & \text{si } t \geq 9 \end{cases}}$

4. F_Y $\begin{cases} \text{est continue sur } \mathbb{R} \text{ (même en 3 et 9)} \\ \text{dérivable partout (sauf en deux points)} \end{cases}$

donc Y admet une densité $f = F_Y' = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 3 \\ 1/6 & \text{si } t \in [3,9] \\ 0 & \text{si } t \geq 9 \end{cases}}$



-5. Rappel : Il fallait lire $\mathbb{E}(Y)=6$ à la place de $\mathbb{E}(Y)=7$. On va voir pourquoi dans ces deux questions

Soit V et M les volumes et masses aléatoires des grêlons

$V = \frac{4}{3}\pi\ Y^3 \times 10^{-3}$ (10^{-3} pour la conversion en cm^3)

$M = 0{,}917 \times V$ (en grammes)

alors $\underline{\mathbb{E}(M) = 0{,}917 \times \frac{4}{3}\pi \times 10^{-3}\ \mathbb{E}(Y^3)}$

Mais $\mathbb{E}(Y^3) = \int_3^9 \frac{1}{6} x^3 dx = \left[\frac{1}{6}\ \frac{x^4}{4}\right]_3^9 = \frac{6561-81}{6\times 4} = \frac{6480}{6\times 4}$

$= \frac{1620}{6} = 270$

or $0{,}917 \times \frac{\pi}{3} \simeq 1$ et $4 \times 0{,}27 \simeq 1$

donc $\mathbb{E}(M) \simeq 1$ gramme

Précisément $0{,}917 \times 3{,}14 \simeq 2{,}88$ et $4\times 0{,}27 = 1{,}08$

et $2{,}88 \times 1{,}08 > 3$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(M) > 1}$

6. ~~On gramme est la masse médiane~~

On calcule la masse médiane, celle telle que la moitié des grêlons exactement ~~est~~ plus lourds. Elle est donnée par le rayon 6 qui est le rayon médian car $\mathbb{P}(Y \geq 6) = \mathbb{P}(Y \leq 6) = \frac{1}{2}$

$\boxed{M_{méd} = \frac{4}{3}\pi \times (0{,}6)^3 \times 0{,}917 < 1g}$ Car $(0{,}6)^3 = 0{,}216 < \frac{1}{4}$

donc la plupart des grêlons font moins d'un gramme.