# Controle continu 2,
# Proba/Stat
# L3 Physique

December 6, 2013

## 1 Consignes et notations

- Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a \vee b = \max(a, b)$ et $a \wedge b = \min(a, b)$.
- Répondez directement sur l'énoncé.
- Ne trainez pas, il y a beaucoup d'exos. Aucun n'est censé être long.
- Ecrivez des justifications uniquement lorsque cela est demandé, et dans ce cas : soyez bref et précis. Utilisez votre brouillon.
- Dans les vrai/faux : c'est 1 point par bonne réponse, -1 par mauvaise réponse. Quand vous ne savez pas, n'écrivez rien.

## 2 Début

**Exercice 2.1** $\boxed{\textbf{sur 9 points:}}$ On considère $X$ une variable aléatoire dont la loi est $Loi_X(dx) = \frac{1}{2}Leb_{[0,2]}(dx) = \frac{1}{2}\,dx1_{x\in[0,2]}$.

- $Loi_{-X}(dx) = \boxed{\frac{1}{2}\,dx1_{x\in[-2,0]}}$
- $Loi_{2X}(dx) = \boxed{\frac{1}{4}\,dx1_{x\in[0,4]}}$
- $Loi_{-\frac{1}{2}X}(dx) = \boxed{dx1_{x\in[-1,0]}}$
- $Loi_{X^2}(dx) = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{x}}dx1_{x\in[0,4]}}$
- pour $\alpha > 0$ : $Loi_{X^\alpha}(dx) = \boxed{\frac{1}{2\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}dx1_{x\in[0,2^\alpha]}}$
- $Loi_{1_{\{X>1\}}}(dx) = \boxed{\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1}$. On rappelle que $1_{\{X(\omega)>1\}} = 1$ si $X(\omega) > 1$ et 0 sinon.

- $Loi_{1_{\{X<1\}}}(dx) = \boxed{\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1}$

**Exercice 2.2** **sur 4 points:** On dit qu'un événement $A \subset \Omega$ est presque-sûr ( relativement à la probabilité $\mathbf{P}$) lorsque $\mathbf{P}[A^C] = 0$. Pour des v.a., dire que $X \leq Y$ presque-sûrement signifie que l'évènement $\{X \leq Y\}$ est presque sûr. Complétez les trous au mieux. Attention, les différents items ne sont pas reliés.

- Supposons $\Omega = \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$, $\mathbf{P}(d\omega) = f(\omega)d\omega 1_{\omega>0}$. On a $X \leq X^2$ presque-sûrement quand $f$ =0 sur $[0,1]$. En effet, dans ce cas on a $\mathbf{P}[X \leq X^2] = 1$ car (faites un petit calcul pour justifier):

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[X \leq X^2] = \\
&= \int 1_{\{x \leq x^2\}} f(x)\, dx \\
&= \int_{[1,\infty[} 1_{\{x \leq x^2\}} f(x)\, dx \text{ car } f \text{ porté par } [1,\infty[ \\
&= \int_{[1,\infty[} f(x)\, dx \\
&= \int f(x)\, dx \text{ car } f \text{ porté par } [1,\infty[ \\
&= 1 \text{ car } f \text{ densité}
\end{aligned}$$

Par contre $X \geq X^2$ presque-sûrement quand $f$ $\boxed{=0 \text{ sur } [1,\infty[}$.

- Supposons $\Omega = \mathbb{R}$, $X(\omega) = \omega$. $X$ est presque surement nulle pour la probabilité $\mathbf{P} = \boxed{\delta_0}$.

- Si $Loi_X = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ alors $X^2$ est une variable aléatoire presque surement $\boxed{\text{constante } (=1)}$.

**Exercice 2.3** **sur 6 points:**

- soit $f, g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convolution de $f$ et de $g$. Cette convolution sera notée $f \star g$.

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\, dt \tag{1}$$

- A l'aide d'un changement de variable très simple, (que l'on détaillera) montrer que la convolution est commutative, c.à.d: $f \star g(x) = g \star f(x)$

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt \tag{2}$$
$$x - t \to s,\ t \to x - s,\ dt \to ds,\ t \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ s \in \mathbb{R} \tag{3}$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(s)g(x-s)\,dt \tag{4}$$
$$= g \star f(x) \tag{5}$$

- On considère $X$ un variable aléatoire de loi $Loi_X(dx) = f_\lambda(x)dx$ avec

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, dx 1_{\{x>0\}} \tag{6}$$

et avec $\lambda > 0$. On considère $Y$ une seconde variable aléatoire, indépendante de $X$ et telle que $Loi_Y = Loi_X$. Déterminer la loi de $X + Y$. Pour cela, on pourra ré-utiliser sans le démontrer, le lien connu entre la convolution et la somme de deux v.a. indépendantes.

AIDE : dans votre calcul de convolution, attention à ne pas oublier l'indicatrice qui apparait dans (6) !

Nous avons que $Loi_{X+Y}(dz) = f_\lambda \star f_\lambda(z)\,dz$. Il nous faut donc calculer cette convolution:

$$f_\lambda \star f_\lambda(x) = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x-t)} e^{-\lambda t} 1_{x-t>0} 1_{t>0}\,dt \tag{7}$$
$$= \lambda^2\ e^{-\lambda x} \int_{\mathbb{R}} 1_{0<t<x}\,ds \tag{8}$$
$$= \lambda^2\ x e^{-\lambda x} 1_{\{x>0\}} \tag{9}$$

**Exercice 2.4** **sur 10 points:** On considère deux variables aléatoires $X, Y$ à valeur dans $\mathbb{R}$, et définies sur une espace probabilité $(\Omega, \mathbf{P})$. On suppose que $X \leq Y$ presque-sûrement (p.s.).

- On se fixe $x \in \mathbb{R}$. Complétez les phrases suivantes avec les symboles $\leq, \geq, \subset, \supset, \Rightarrow, \Leftarrow$ :
  - $Y \leq x$ p.s. $\boxed{\Rightarrow}$ $X \leq x$ p.s.
  - $\{Y \leq x\}$ $\boxed{\subset}$ $\{X \leq x\}$.
  - $\mathbf{P}\{Y \leq x\}$ $\boxed{\leq}$ $\mathbf{P}\{X \leq x\}$.

- On suppose maintenant que $X \in \{1,2\}$ p.s. et que $Y \in \{1,2\}$ p.s. Inventez $Loi_{(X,Y)}$ pour que l'on ai effectivement $X \le Y$ p.s. (Il y a de nombreux choix possible). On écrira cette loi sous forme de Dirac :

$$Loi_{(X,Y)} = \boxed{\frac{1}{2}\delta_{1,1} + \frac{1}{2}\delta_{0,0}}$$

et on écrira aussi les coefficients de ces Diracs dans le tableau ci-dessous.

| $X\backslash Y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{0}{2}$ |
| 2 | $\frac{0}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

- Peut-on inventer cette loi, en faisant en sorte qu'au moins 3 des 4 coefficients du tableau soient non-nul. Justifiez (votre justification peut éventuellement faire appel à votre invention précédente).

Avec notre exemple précédent, cela ne marche pas. Mais prenant par exemple :

| $X\backslash Y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 1/3 |
| 2 | 0 | 1/3 |

Donc $Loi_{(X,Y)} = \frac{1}{3}\delta_{1,1} + \frac{1}{3}\delta_{1,2} + \frac{1}{3}\delta_{2,2}$, c'est bon.

- Peut-on inventer cette loi, en faisant en sorte qu'au moins 3 des 4 coefficients du tableau soient non-nul, et qu'en plus $X$ et $Y$ soient indépendants. Justifiez (votre justification peut éventuellement faire appelle une de vos inventions précédentes).

Non c'est impossible. Notons $\mathbf{P}[X = 1] = a, \mathbf{P}[Y = 1] = b$ donc $\mathbf{P}[X = 2] = 1 - a, \mathbf{P}[Y = 2] = 1 - b$. Donc avec l'indépendance, la loi du couple est donnée par :

| $X\backslash Y$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $ab$ | $a(1-b)$ |
| 2 | $(1-a)b$ | $(1-a)(1-b)$ |

La contrainte $X \le Y$ impose que $\mathbf{P}[X = 2, Y = 1] = (1-a)b = 0$. Ce qui impose $(1-a) = 0$ ou bien $b = 0$, ce qui implique que des coefficient du tableau soient nul.

**Exercice 2.5** $\boxed{\textbf{sur 4 points:}}$ Soit $(X,Y)$ un couple aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi est donnée par

$$Loi_{(X,Y)}(dx,dy) = c_{st} 1_{\{x^2+y^2<1\}}\, dx\, dy$$

On supposera que le point $(X,Y)$ est la position d'une fléchette lancée sur une cible. Nécessairement on a $c_{st} = \boxed{1/\pi}$. Déterminer la loi de la distance entre la fléchette et le centre de la cible. On ne demande pas de justifications.

Il faut faire le changement en coordonnées polaire. Le $dx\,dy$ se transforme en $rdrd\theta$. Clairement cette distance est dans $[0,1]$. Donc:

$$Loi_{\sqrt{X^2+Y^2}}(dr) = 2rdr1_{r\in[0,1]}$$

Le coefficient 2 venant de la normalisation.

**Exercice 2.6** $\boxed{\textbf{sur 4 points:}}$ On considère $\Omega = [-1,1]$ sur lequel on met la probabilité $\mathbf{P}$ uniforme. On considère la variable aléatoire $X(\omega) = \omega \vee 0 + 1_{\omega<0}$.

- Tracer sommairement le graphe de $X$.

- Calculez l'espérance de $X$ <u>sans utiliser le théorème de transfert</u>. Mettez quelques étapes de calcul:

$$\mathbf{E}[X] = \int_{[-1,1]} X(\omega)\mathbf{P}[d\omega] \tag{10}$$
$$= \frac{1}{2}\int_{[-1,1]} (1_{\{\omega<0\}} + \omega\vee 0)\, d\omega \tag{11}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}) \tag{12}$$
$$= \frac{3}{4} \tag{13}$$

- Donnez la loi de $X$ sans justification.

$$Loi_X = \boxed{\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}Leb_{[0,1]}} \tag{14}$$

- Calculer $\mathbf{E}[X^2]$ en utilisant le théorème de Transfert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 Loi_X(dx) && (15)\\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2 (\frac{1}{2}\delta_1(dx) + \frac{1}{2}\,dx) && (16)\\
&= \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} && (17)\\
&= \frac{2}{3} && (18)
\end{aligned}$$

**Exercice 2.7** **sur 6 points:** On rappelle qu'une v.a. $X$ est bornée p.s. lorsqu'il existe $B \in \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{P}[|X| \leq B] = 1$. Vrai, faux.

- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle bornée p.s. Alors $\mathbf{E}[X]$ est bien définie. Vrai
- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle bornée p.s. Supposons que $Loi_X(dx) = f(x)\,dx$. Alors $f$ est nulle en dehors d'un intervalle fini (à un négligeable près). Vrai
- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle bornée p.s. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors $\mathbf{E}[f(X)]$ est bien défini. Faux
- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle dont la densité est donnée par $x \to c_{st}\frac{1}{1+x^2}$. Alors $\mathbf{E}[X]$ est bien définie. Faux
- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle dont la densité est donnée par $x \to c_{st}\frac{1}{1+|x|^3}$. Alors $\mathbf{E}[X]$ est bien définie. Vrai
- Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une v.a. réelle dont la densité est donnée par $x \to c_{st}\frac{1}{1+|x|^3}$. Alors $\mathbf{V}[X]$ est bien définie. Faux

**Exercice 2.8** **sur 6 points:** Considérons $X$ dont la loi est donnée par $f(x)\,dx$ et $Y$ dont la loi est donnée par $g(x)\,dx$. Nous noterons $\overline{F}(x) = \int 1_{\{a>x\}} f(a)\,da$ et $\overline{G}(x) = \int 1_{\{a>x\}} g(a)\,da$. Nous supposons que $X$ et $Y$ sont indépendants. Exprimer $Loi_{(X,Y)}(dx,dy)$ avec $f, g$:

$$Loi_{(X,Y)}(dx,dy) = \boxed{f(x)\,g(y)\,dx\,dy}$$

Exprimez, $\mathbf{P}[X > x, Y > y]$ avec $\overline{F}, \overline{G}$:

$$\mathbf{P}[X > x, Y > y] = \boxed{\overline{F}(x)\,\overline{G}(y)}$$

Nous allons déterminez la loi de $X\wedge Y$ ( rappelons la notation $X\wedge Y = \min(X,Y)$). Par le théorème de transfert, pour toute fonction $\varphi$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(z) Loi_{X\wedge Y}(dz) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x\wedge y) Loi_{(X,Y)}(dx,dy)$$

Il nous faut donc calculer cette intégrale au moyen de nos données. En partant du terme de droite, en découpant cette intégrale double en deux partie... (Rédiger les calculs intermédiaires:)

$$= \iint_{\{x<y\}\cup\{x\geq y\}} \varphi(x\wedge y) f(x) g(y)\,dx\,dy \tag{19}$$

$$= \iint 1_{\{x<y\}}\varphi(x) f(x) g(y)\,dx\,dy \tag{20}$$

$$+ \iint 1_{\{x\geq y\}}\varphi(y) f(x) g(y)\,dx\,dy \tag{21}$$

$$= \int \varphi(x) f(x) \Big[\int g(y) 1_{x<y}\,dy\Big]\,dx \tag{22}$$

$$+ \int \varphi(y) g(y) \Big[\int f(x) 1_{x\geq y}\,dx\Big]\,dy \tag{23}$$

$$= \int \varphi(x) f(x) \overline{G}(x)\,dx + \int \varphi(y)\overline{F}(y)\,dy \tag{24}$$

$$= \int \varphi(z)\Big(f(z)\overline{G}(z) + g(z)\overline{F}(z)\Big) dz \tag{25}$$

Ce qui montre que

$$Loi_{X\wedge Y}(dz) = \left( \boxed{\; f(z)\overline{G}(z) + g(z)\overline{F}(z) \;} \right) dz$$

**Exercice 2.9** $\boxed{\textbf{sur 7 points:}}$ Nous nous intéressons aux Français. Ils peuvent avoir 3 caractéristiques : il peuvent être optimiste ou pessimiste, ils peuvent être du sud ou du nord, ils peuvent être de gauche ou de droite. Décrivez précisément une situation où:

- localement dans le sud, le caractère optimiste/pessimiste est indépendant du caractère droite/gauche,
- localement dans le nord, le caractère optimiste/pessimiste est indépendant du caractère droite/gauche,
- globalement sur la France, les gens de gauche sont plus optimistse que les gens de droite.

On fera quelques calculs de probabilités conditionnelles pour prouver que le modèle construit décrit ce phénomène. On mettra des coefficients simple pour faciliter les calculs. On s'appliquera pour présenter ces calculs.

AIDE (vous n'êtes pas obligé de l'utiliser). Vous pourrez vous placer dans la situation suivante: «Quand on choisis un français au hasard parmi les gens de droite, on a plus de chance de tomber sur quelqu'un du sud. Par ailleurs les gens du sud sont clairement plus pessimistes. Ainsi, le fait d'être de droite augmente les chances d'être pessimiste.»

Nous effectuons une modélisation en arbre. Les coefficients sont simples, mais on pourrait faire encore plus simple.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\ \text{Nord} & \begin{cases} \frac{1}{2}\ \text{gauche} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{optimiste} \\ \frac{1}{2} & \text{pessimiste} \end{cases} \\ \\ \frac{1}{2}\ \text{droite} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{optimiste} \\ \frac{1}{2} & \text{pessimiste} \end{cases} \end{cases} \\ \\ \frac{1}{3}\ \text{Sud} & \begin{cases} \frac{3}{10}\ \text{gauche} \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{optimiste} \\ \frac{3}{4} & \text{pessimiste} \end{cases} \\ \\ \frac{7}{10}\ \text{droite} \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{optimiste} \\ \frac{3}{4} & \text{pessimiste} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Un calculs préliminaires:

$$\mathbf{P}[Droite] = \frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{7}{30} = \frac{10}{30} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}$$

Illustrons le fait que «Quand on choisis un français au hasard parmi les gens de droite, on a plus de chance de tomber sur quelqu'un du sud. Or les gens du sud sont clairement plus pessimistes. » (c'est ce qui était indiqué dans l'aide). Cette justification n'est pas nécessaire résoudre cet exo.

$$\mathbf{P}[sud/droite] = \frac{7/30}{17/30} = \frac{7}{17}$$

$$\mathbf{P}[nord/droite] = 1 - \frac{7}{17} = \frac{10}{17}$$

Maintenant montrons que l'on a plus de chance d'être pessimiste quand on est de droite, que pessimiste quand on est de gauche:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Pessimiste/Gauche] &= \mathbf{P}[Pessimiste \cap Gauche] \Big/ \mathbf{P}[Gauche] && (26) \\ &= \left(\frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{9}{40}\right) \Big/ \left(\frac{13}{30}\right) && (27) \\ &= \left(\frac{2}{3}\frac{10}{40} + \frac{1}{3}\frac{9}{40}\right) \Big/ \left(\frac{13}{30}\right) && (28) \\ &= \left(\frac{29}{120}\right) \Big/ \left(\frac{13}{30}\right) \sim 0.55769230769 && (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[Pessimiste/Droite] &= \mathbf{P}[Pessimiste \cap Droite] \Big/ \mathbf{P}[Droite] && (30) \\ &= \left(\frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{21}{40}\right) \Big/ \left(\frac{17}{30}\right) && (31) \\ &= \left(\frac{2}{3}\frac{10}{40} + \frac{1}{3}\frac{21}{40}\right) \Big/ \left(\frac{17}{30}\right) && (32) \\ &= \left(\frac{41}{120}\right) \Big/ \left(\frac{17}{30}\right) \sim 0.60294117647 && (33) \end{aligned}$$

Donc:

$$\mathbf{P}[Pessimiste/Gauche] < \mathbf{P}[Pessimiste/Droite]$$

Pour ésoudre l'exo, on aurait pu aussi établir que:

$$\mathbf{P}[Gauche/pessimiste] < \mathbf{P}[Droite/Pessimiste]$$