Controle continu 1,
Proba/Stat
L3 Physique

December 18, 2012

Exercice 0.1 (+1 par bonne réponse, -1 par mauvaise) Vrai / Faux.

(a). Une fonction de répartition est décroissante. $\boxed{\text{Faux}}$

(b). Une fonction caractéristique est décroissante. $\boxed{\text{Faux}}$

(c). Une fonction de queue est décroissante. $\boxed{\text{Vrai}}$

(d). Une fonction de répartition est toujours continue. $\boxed{\text{Faux}}$

(e). Si X et Y sont deux v.a. réelles indépendante, alors la loi du couple (X, Y) est entièrement déterminée par les lois marginales. $\boxed{\text{Vrai}}$

(f). Une suite i.i.d. de v.a. $(X_1, X_2, ...)$ converge vers d'espérance de X_1. $\boxed{\text{Faux}}$

(g). Quand une loi admet une densité, alors sa fonction de répartition est une primitive de cette densité. $\boxed{\text{Vrai}}$

(h). Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes quelque soit les fonctions f et g. $\boxed{\text{Vrai}}$

(i). Si X et Y sont indépendantes alors X et $Y + X$ sont toujours indépendantes. $\boxed{\text{Faux}}$

Exercice 0.2 (1+2+1+1+2+3) Considérons une v.a. $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dont la loi est uniforme sur le disque D de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 (c.à.d $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$). Notons (Θ, R) les coordonnées polaires de (X, Y). Donc Θ est à valeurs dans $[-\pi, \pi[$ et R est à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

(a). On a $\mathbf{P}[R < \frac{1}{2}]$ $\boxed{<}$ $\mathbf{P}[R > \frac{1}{2}]$ (complétez avec $<$ ou $>$, ou $=$...) (faites un dessin !)

(b). Pour $x \in [0, 1]$, calculez $\mathbf{P}[R \leq x]$.

$$\boxed{\mathbf{P}[R \leq x] = \frac{x^2\pi}{\pi} = x^2 \qquad (1)}$$

(c). On a $\mathbf{P}\Big[\Theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\Big] = \boxed{\frac{1}{2}}$.

(d). On a $\mathbf{P}\Big[\Theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\Big] = \boxed{\frac{1}{4}}$.

(e). En utilisant votre intuision, donnez la loi de Θ (c'est une loi à densité).

$$\boxed{Loi_\Theta(dx) = \frac{1}{2\pi} 1_{[-\pi,+\pi]}(x)dx}$$

(f). En utilisant votre intuision, ou bien une question précédente, donnez la loi de R (c'est une loi à densité).

$$\boxed{Loi_R(dx) = 2x1_{[0,1]}(x)dx}$$

Exercice 0.3 (2+2+2+2) Considérons une suite X_n de v.a. telle que $\mathbf{P}[X_n = \frac{1}{n}] = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}[X_n = -\frac{1}{n}] = \frac{1}{2}$.

(a). Donnez la fonction caractéristique des v.a. de cette suite.

$$\boxed{Carac_{X_n}(u) = \mathbf{E}[e^{iuX_n}] = \frac{1}{2}e^{iu\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}e^{iu\frac{1}{n}} = cos(\frac{u}{n})}$$

(b). En déduire que cette suite converge en loi vers une loi μ que l'on précisera.

$Carac_{X_n}$ converge vers 1 qui est la fonction caractéristique de δ_0. Ainsi X_n converge en loi vers δ_0.

(c). La suite (X_n) converge -t-elle presque surement vers quelque chose ?

Oui, X_n converge presque surement vers zéro. En effet, la distance entre X_n et 0 est égale à $\frac{1}{n}$ qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

(d). Trouvez un intervalle $]a, b[$ telle que $\mathbf{P}[X_n \in]a, b[]$ ne converge pas vers $\mu(]a, b[)$.

Il suffit de prendre $]a, b[=]0, 1[$. On a

$$\mathbf{P}[X_n \in]a, b[] = \frac{1}{2} \not\to 0 = \delta_0(]a, b[)$$

Exercice 0.4 (1+1+1+2) On dit que la loi d'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est symétrique lorsque X et $-X$ ont même loi.

(a). Que peut-on dire de l'espérance d'une v.a. symétrique (quand l'espérance existe) ?

Elle est nulle

(b). Donnez un exemple d'une v.a. symétrique et ayant une densité.

La Gaussienne, la loi de cauchy

(c). La densité d'une telle v.a. est nécessairement $\boxed{\text{paire}}$.

(d). Donnez un exemple d'une v.a. symétrique et discréte.

$$\boxed{X \text{ telle que } \mathbf{P}[X=1] = \mathbf{P}[X=-1] = \tfrac{1}{2}}$$

Exercice 0.5 (1+2+1+1+2+2) Soient X et Y deux v.a. réelles.

(a). Donnez la définition de la fonction caractéristique de X.

$$\boxed{Carac_X(u) = \mathbf{E}[e^{iuX}]}$$

(b). Si X et Y sont indépendant que peut-on dire de la fonction caractéristique de $X+Y$.

$$\boxed{Carac_{X+Y} = Carac_X \times Carac_Y}$$

Supposons maintenant que X et Y sont à valeurs dans $\{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ que leur loi jointe est donnée par le tableau suivant:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	$\frac{1}{4}$
2	0	0	0

(a). Donnez la fonction caractéristique de X.

$$\boxed{Carac_X(u) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{i2u}}$$

(b). Donnez la fonction caractéristique de Y.

$$\boxed{Carac_Y(u) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{iu} + \frac{1}{4}e^{i2u}}$$

(c). Donnez la fonction caractéristique de $X+Y$.

Déterminons tout d'abord la loi de $X+Y$: C'est

$$\frac{1}{4}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_3$$

On a donc

$$Carac_{X+Y}(u) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{iu} + \frac{1}{4}e^{i3u}$$

(d). En analysant les deux parties de cet exo, essayer d'en déduire quelque chose.

Clairement, sur cet exemple, $Carac_{X+Y}$ n'est pas le produit de $Carac_X$ par $Carac_Y$. L'indépendance est donc importante pour avoir cette propriété. En fait, il est possible de montrer de manière générale que

$$X \perp\!\!\!\perp Y \;\Leftrightarrow\; Carac_{X+Y} = Carac_X Carac_Y$$

Exercice 0.6 (1+1+2+2+1+1+3) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une v.a. dont la loi est $f_X(x)dx$ (la fonction f_X est donc une donnée de cet exercice).

(a). On considère $Z = 4X$. Donnez la loi de Z sans justification:

$Loi_Z(dz) = \frac{1}{4} f_X(\frac{z}{4})$.

(b). Quel est la probabilité que Z soit plus grand que X ? c'est 1

(c). Déterminez la loi de $Y = X^2$ (on justifiera par un petit calcul).

$$\mathbf{E}[\varphi(X^2)] = \int_0^\infty \varphi(x^2) f_X(x)\,dx \tag{2}$$

changement de variable :

$x^2 \to y$, $x \to \sqrt{y}$, $dx \to |-\frac{1}{2}|\frac{1}{\sqrt{y}}dy$

domaine: $x \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; y \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbf{E}[\varphi(X^2)] = \int_0^\infty \varphi(y)\frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})\,dy \tag{3}$$

Par identification: la loi de Y c'est $\frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})\,dy$

(d). Quelle est la probabilité que Y soit plus grand que X ?

$\mathbf{P}[Y \geq X] = \mathbf{P}[X \geq 1] = \int_1^\infty f_X(x)dx$

(e). Dans quel cas Y est toujours plus grande que X ?

quand f_X est portée par $[1, \infty[$

(f). Dans quel cas Y est toujours plus petite que X ?

quand f_X est portée par $[0, 1]$

(g). On considère une v.a. K plus grande que X. Cela implique une relation entre la fonction de queue de K et la fonction de queue de X. Laquelle ?

Si $K \geq X$ alors $X > x \Rightarrow K > x$ donc $\{X > x\} \subset \{K > x\}$ donc $\mathbf{P}[X > x] \leq \mathbf{P}[K > x]$. Ainsi la fonction de queue de X est plus petite que la fonction de queue de K.

Exercice 0.7 (2+2+3) Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes dont les fonctions de répartitions sont F_X et F_Y (ce sont nos données).

(a). Exprimez la fonction de queue de $\min(X, Y)$ avec nos données.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\min(X,Y) > x] &= \mathbf{P}[X > x, Y > x] && (4)\\
&= \mathbf{P}[X > x]\mathbf{P}[Y > x] && (5)\\
&= (1 - F_X(x))(1 - F_Y(y)) && (6)
\end{aligned}$$

(b). Exprimez la fonction de répartition de $\min(X, Y)$ avec nos données.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\min(X,Y) \leq x] &= 1 - \mathbf{P}[\min(X,Y) > x] && (7)\\
&= 1 - (1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) && (8)\\
&= F_X(x) + F_Y(x) - F_X(x)F_Y(x) && (9)
\end{aligned}$$

(c). Exprimez la fonction de queue et la fonction de répatition de $\max(X, Y)$ avec nos données.

On commence par la fonction de répartition:

$$\mathbf{P}[\max(X,Y) \le x] = \mathbf{P}[X \le x, Y \le x] \tag{10}$$
$$= \mathbf{P}[X \le x]\mathbf{P}[Y \le x] \tag{11}$$
$$= F_X(x)F_Y(y) \tag{12}$$

Du coup la fonction de queue c'est $1 - F_X(x)F_Y(y)$.

Exercice 0.8 (2) Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi admet un atome en 3. Que peut-on dire de la fonction de répartition de X ? Elle admet une discontinuité en 3.

Exercice 0.9 (2+2+3+3) Soit (X_n) une suite i.i.d. de v.a. d'espérance m et de variance σ^2.

(a). Notons $S_n = \sum_{k=1}^n X_i$. Donnez l'expression de $\tilde{S}_n$: le centré réduit de S_n.

$\mathbf{V}[S_n] = n\sigma^2$. $\mathbf{E}[S_n] = nm$. Du coup

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

(b). Quand n est grand, à quoi ressemble la loi de $\tilde{S}_n$.

A une $\mathcal{N}(0,1)$, c'est le théorème central limite

(c). Considérons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_i$. Exprimez $\overline{X}_n$ en fonction de $\tilde{S}_n$.

$$\tilde{S}_n = \frac{n\overline{X}_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \tag{13}$$
$$= (\overline{X}_n - m) \tag{14}$$

du coup

$$\overline{X}_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tilde{S}_n + m$$

(d). A quoi ressemble la loi de $\overline{X}_n$ quand n est grand ?

Puisque $\tilde{S}_n$ ressemble à une $\mathcal{N}(0,1)$, du coup $\overline{X}_n$ ressemble à une $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$

(e). Pourquoi est-ce naturel que la variance de $\overline{X}_n$ tende vers zéro ?

La loi forte des grands nombres nous indique que $\overline{X}_n$ converge vers la constante m. Il est donc naturelle que plus n est grand, et plus la variance de $\overline{X}_n$ se rapproche de 0 (on rappelle que la variance mesure l'écart à la moyenne, en particulier, une v.a. constante à une variance nulle).