

Contôle partiel 4.

Durée : 30 minutes

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable sont interdits pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

1. Démographie sur un disque chinois.

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire de loi uniforme sur le disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}.$$

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ?
2. Quelles sont les densités de X et de Y ?
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. On suppose $X = R \cos(\Theta)$ et $Y = R \sin(\Theta)$ pour R et Θ des variables aléatoires à valeurs dans $]0, 1[$ et $]0, 2\pi[$ respectivement. Quelle est la loi de R ?
Indication : cette question peut-être traitée directement ou à la suite de la question 6.
5. Calculer la variance de X .
Indication : on pourra utiliser $R^2 = X^2 + Y^2$.
6. Quelle est la loi du couple (R, Θ) ?
Indication : une méthode consiste à utiliser le changement de variable des coordonnées polaire pour lequel $dx dy = r d\theta dr$ et en notant T le changement de coordonnées $T(x, y) = (r, \theta)$.
7. Montrer que R et Θ sont indépendantes.
8. Justifier $dx dy = r d\theta dr$ utilisé à la question 6.

FIN DE L'ÉPREUVE