Examen : initiation aux probabilités.

Durée : 120 minutes

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable sont interdits pour cette épreuve. On trouvera en annexe une table numérique de répartition de loi normale centrée réduite.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il peut interroger les surveillants. Barême : en résolvant quatre des cinq exercices, vous obtenez la totalité des points. Chacun des 5 exercices apporte environ 5 points. Le correcteur se réserve la possibilité d'ajouter des bonus hors-barême pour les remarques spécialement pertinantes.

1. Dés non transitifs

On jette trois dés spéciaux A,B et C simultanément. Les 6 faces de A marquent les valeurs $\{2, 2, 4, 4, 9, 9\}$. Les faces de B sont $\{1, 1, 6, 6, 8, 8\}$ et celles de C sont $\{3, 3, 5, 5, 7, 7\}$. On désigne par X_A, X_B et X_C les valeurs (aléatoires) obtenues lors du lancer.

1. Avec quelle probabilité A sera-t-il supérieur à B ?
2. Même question pour B et C ainsi que pour C et A.
3. Lequel des trois dés a la plus forte probabilité d'indiquer la plus forte valeur ?
4. Le dé A indique une valeur supérieure à celle de B. Avec quelle probabilité a-t-on alors $X_B = 8$?

2. Rendez-vous

Paul et Valérie ont rendez-vous chez Robert, entre 12h et 14h. Par hypothèse, les instants d'arrivée de Paul et Valérie sont des variables aléatoires X et Y indépendantes, de distribution uniforme sur $[0, 2]$, l'instant zéro correspondant à midi, l'unité de temps étant l'heure.

1. Soit U la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à la première arrivée. Déterminer la densité de probabilité de U .
2. Soit V la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à ce que ses deux amis soient arrivés. Déterminer la densité de probabilité de V .
3. Soit W la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert entre les deux arrivées. Déterminer la densité de probabilité de W.
   Indication : on utilisera la densité de (X, Y).
4. Que vaut en moyenne la durée entre les deux arrivées ?

3. Mesure d'une grandeur physique

On admet que la mesure d'une grandeur physique, dont la valeur exacte est m, suit la loi normale $\mathcal{N}(m, m/10)$. On effectue une série de n mesures et on approxime m par la moyenne de ces mesures M_n.

1. Que sait-on de la loi de M_n ?
2. Pour combien de mesures n, l'erreur (relative) commise est-elle inférieure à 1% avec une probabilité supérieure à 0,9 ?

Aide : Les n mesures définissent n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi normale $\mathcal{N}(m, m/10)$.

4. Jetons

Pour retourner 3 jetons distingables et bicolores, Sophie procède ainsi : elle rassemble les jetons et les jette simultanément sur la table. Chaque jeton a une chance sur deux de tomber sur la face noire. Sophie ramasse les jetons blancs, laisse les noirs sur la table et recommence la procédure autant de fois que nécessaire.

Les jetons sont numérotés de 1 à 3. On pose X_k l'odre du premier lancer qui retourne le k-ième jeton. Par exemple $\{X_2 = 10\}$ signifie que le jeton numéro 2 se retourne au dixième lancer.

1. Quelle est la loi de X_k ?
2. Au bout de combien de lancers la probabilité d'avoir fini est-elle supérieure à $1/2$?
3. Au bout de combien de lancers reste-t-il en moyenne strictement moins de un jeton à retourner ?

5. Un autre rendez-vous

Pour organiser une réunion, on demande à n personnes d'indiquer leurs deux créneaux horaires préférés parmi quatre possibles (8–10h, 10–12h, 14–16h et 16–18h). On estime que les participants répondent indépendemment et que chaque réponse à la même probabilité.

1. Avec quelle probabilité pourra-t-on trouver un créneau qui convient si $n = 2$?

On note A (resp. B, C et D) l'événement « le premier créneau convient à tous les participants »(resp. le deuxième, le troisième et le quatrième).

2. Quelle est la probabilité de A (en fonction de n) ?
3. Exprimez $\mathbb{P}(A \cup B \cup C \cup D)$ en fonction des probabilités de A, B, C, D et de leurs intersections ?
4. Avec quelle probabilité trouvera-t-on un créneau (en fonction de n) ?

FIN DE L'ÉPREUVE