Examen du 6 Janvier 2011

Correction sommaire

Exercice 1 A, B et C sont indépendants. Il en va donc de même de $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ mais aussi de $\bar{A}, B, C$ etc.

1. $\mathbb{P}\left((A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\right)$

$= \mathbb{P}(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) + \mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$ les événements sont disjoints

indépendance

$= 0{,}1\times(1-0{,}2)\times(1-0{,}3) + 0{,}9\times0{,}2\times0{,}7 + 0{,}9\times0{,}8\times0{,}3$

$= \dfrac{56+126+216}{1000} = \dfrac{398}{1000} = 0{,}398$

2. Toutes en panne $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = 0{,}1\times0{,}2\times0{,}3 = 0{,}006$

Toutes actives : $\mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) = 0{,}9\times0{,}8\times0{,}7 = 0{,}504$

2 en panne $1-0{,}398-0{,}006-0{,}504 = 0{,}092$

Vérification $0{,}092 = \underbrace{0{,}1\times0{,}2\times0{,}7}_{0{,}014} + \underbrace{0{,}1\times0{,}8\times0{,}3}_{0{,}024} + \underbrace{0{,}9\times0{,}2\times0{,}3}_{0{,}054}$

Donc

Nombre d'imprimante en panne	0	1	2	3
proba	0,504	0,398	0,092	0,006

Exercice 2

pour tout i : $T_i \longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ densité $\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

1. $\mathbb{P}(T_i \leq t_{1/2}) = \dfrac{1}{2} \iff \displaystyle\int_0^{t_{1/2}} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_{t_{1/2}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{2}$

$\iff \left[-e^{-\lambda x}\right]_{t_{1/2}}^{+\infty} = \dfrac{1}{2} \iff t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

2. N_t suit une loi binomiale de paramètre 10 000 et $\mathbb{P}(T_i > t) = e^{-\lambda t}$ $\quad N_t \longrightarrow \mathcal{B}(10\,000, e^{-\lambda t})$

en effet chaque particule peut être active (succès avec proba $e^{-\lambda t}$) ou inactive (échec) indépendamment des autres.

3. et 4. $\mathbb{E}(N_t) = 10\,000 e^{-\lambda t}$, $Var(N_t) = 10\,000 \left(e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})\right)$

$\sigma(N_t) = 100 \sqrt{e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})}$

par $t = t_{1/2}$

$$\mathbb{E}(N_t) = 10\,000 \times \frac{1}{2} = 5000, \quad \sigma(N_t) = 100 \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 50$$

5. $$\mathbb{P}\left(|N_{t_{1/2}} - \mathbb{E}(N_{t_{1/2}})| \geq 0{,}05\, \mathbb{E}(N_{t_{1/2}}) \right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\underbrace{\left| \frac{N_{t_{1/2}} - 5000}{50} \right|}_{\text{suit approximativement la loi } \mathcal{N}(0,1)} \geq \frac{0{,}05 \times 5000}{50} \right)$$

$$\simeq \mathbb{P}(|Z| \geq 2{,}5) \simeq 2 \times \overbrace{(1 - 0{,}9938)}^{\mathbb{P}(Z > 2{,}5)} \simeq 0{,}0124$$

6. À $t = 3\ln 10/\lambda$ on a $p_t = e^{-3\ln 10} = \frac{1}{1000}$

$\lambda = 10\,000 \times \frac{1}{1\,000} = 10$

$$\mathbb{P}(|N_t - 10| \geq 0{,}5) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 10) \simeq 1 - \frac{10^{10} e^{-10}}{10!}$$

or $\frac{10^{10} e^{-10}}{10!} = \frac{10^9}{9!\, \exp(10)}$ où $9! \simeq 3{,}6 \times 10^5$ et $\exp 10 \simeq 2{,}2 \times 10^4$

$\simeq \frac{1}{2{,}2 \times 36} \leq \frac{1}{6}$

On a donc $\mathbb{P}(|N_t - 10| \geq 0{,}5) \geq \frac{5}{6} \geq \frac{1}{2}$

Exercice 3

1 - $\binom{52}{13}$

2 - $\dfrac{4}{\binom{52}{13}}$

3 - on doit choisir les 4 piques, les 3 cœurs, les 3 carreaux et trèfle

$$\frac{\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{3}\binom{13}{3}}{\binom{52}{13}}$$

On doit comparer cela à $\dfrac{\binom{13}{4}\binom{13}{4}\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{13}}$

Cela revient à comparer $\binom{13}{3}^2$ à $\binom{13}{4}\binom{13}{2}$

$\binom{13}{3}^2 = \left(\dfrac{13\times12\times11}{3\times2\times1}\right)^2$; $\binom{13}{4}\binom{13}{2} = \dfrac{(13\times12\times11\times10)\times13\times12}{(4\times3\times2\times1)\times(2\times1)}$

$\leq \binom{13}{3}^2$

On l'ordre annoncé par la question entre les probabilités

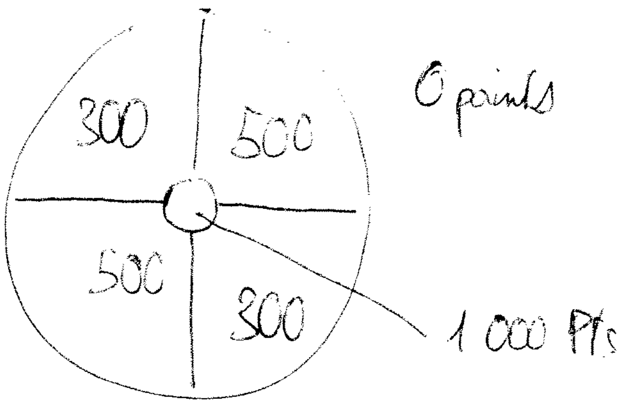
4 - Il y a 4 façons d'avoir une répartition (4, 3, 3, 3) (Par exemple (4♡, 3♠, 3♣, 3♢ : ici c'est ♡ qui est en 4 exemplaires)

Il y a $\binom{4}{2}\times 2$ façon d'avoir une répartition (4, 4, 3, 2)
(on choisit les deux couleurs dominantes puis on multiplie par 2)

Comme $4\left(\dfrac{13\times12\times11}{3\times2\times1}\right)^2 \leq 12\ \dfrac{(13\times12\times11\times10)\times(13\times12)}{(4\times3\times2\times1)\times(2\times1)}$ on a le résultat voulu.

Exercice 4

1.



2. Méthode de la fonction test : Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{E}\big(\varphi(R,\theta)\big) = \mathbb{E}\Big(\varphi\big(T(X,Y)\big)\Big) = \iint \varphi(T(x,y)) \,\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\, dx\, dy$$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Le déterminant est $\cancel{1}\, r$.

On a donc
$$\mathbb{E}\big(\varphi(R,\theta)\big) = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{+\infty} \varphi(r,\theta)\, \boxed{\frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi}}\; r\, dr\, d\theta$$

densité de (R,θ) sur $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$.

3. $\mathbb{P}(N = 1000) = \mathbb{P}(R \leq \frac{1}{4} \cap \theta \in]0, 2\pi[)$

$$= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2} = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^1 = 1 - e^{-1/32}$$

$$\mathbb{P}(N = 500) = \iint_{\substack{\theta \in]0,\frac{\pi}{2}[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[\\ r \in]1/4, 1[}} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}\, dr = \frac{1}{2} \times \left[-e^{-r^2/2}\right]_{1/4}^1 = \frac{e^{-\frac{1}{32}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

de même $\mathbb{P}(N = 300) = \dfrac{e^{-\frac{1}{32}} - e^{-\frac{1}{2}}}{2}$, $\mathbb{P}(N=0) = \mathbb{P}(R > 1 \cap \theta \in]0, 2\pi[)$

$= e^{-1/2}$

4. avoir moins de 400 points c'est :

- soit tirer deux fois à côté
- soit mettre une flèche à côté et l'autre dans le 300 (dans l'un ou l'autre ordre).

Ainsi en notant N' le nombre de points au bout de deux tirs

$$\mathbb{P}(N'=0 \mid N' \leqslant 400) = \frac{\mathbb{P}(\{N'=0\} \cap \{N' \leqslant 400\})}{\mathbb{P}(N' \leqslant 400)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N'=0)}{\mathbb{P}(N'=0) + \mathbb{P}(N'=300)}$$

$$= \frac{\left(e^{-1/2}\right)^2}{\left(e^{-1/2}\right)^2 + 2 \times e^{-1/2} \times \frac{e^{-1/32} - e^{-1/2}}{2}}$$

$$= \frac{e^{-1/2}}{e^{-1/2} + e^{-1/32} - e^{-1/2}} = \frac{e^{-1/2}}{e^{-1/32}} = \boxed{e^{-15/32}}$$

(sous réserve)