

Examen : initiation aux probabilités.

Durée : 120 minutes

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable sont interdits pour cette épreuve. On trouvera en annexe une table numérique de répartition de loi normale centrée réduite.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il peut interroger les surveillants. Barème : pour chaque exercice sauf le dernier, les dernières questions valent plus que les premières. Le correcteur se réserve la possibilité d'ajouter des bonus hors-barème pour les remarques spécialement pertinentes.

1. Vos impressions ? – 3 points

Une salle d'impression comporte 3 machines indépendantes entre elles M_A, M_B, M_C . Les probabilités de défaillance sont respectivement $\mathbb{P}(A) = 0.1$; $\mathbb{P}(B) = 0.2$; $\mathbb{P}(C) = 0.3$.

1. Quelle est la probabilité d'avoir exactement une imprimante en panne ?
2. Quelle est la loi de probabilité du nombre d'imprimante en panne ?

2. Exercice deux – 8 points

On dispose d'un axe des temps paramétré par $t \in [0, +\infty[$ et de 10 000 particules $(a_i)_{i=1, \dots, 10^4}$ actives à l'instant $t = 0$. Les particules sont identiques et agissent de manière indépendante. Chaque particule a_i devient inactive au bout d'une durée aléatoire T_i qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . On appelle demi-vie d'une particule la durée $t_{1/2}$ après laquelle chaque particule a une chance sur deux d'être inactive.

1. Montrez $t_{1/2} = \ln 2 / \lambda$.
2. Soit N_t le nombre de particules actives à l'instant t . Quelle est la loi suivie par N_t ? (en fonction de t)
3. À la demi-vie combien de particules sont-elles actives en moyenne ?
4. Quels sont l'espérance et l'écart-type de N_t ? (en fonction de t)

Les questions suivantes concernent l'étude de la variation relative de N_t .

5. À l'aide de l'approximation normale donnez une valeur approchée de

$$\mathbb{P}(\{|N_t - \mathbb{E}(N_t)| \geq 0.025 \times \mathbb{E}(N_t)\})$$

à la demi-vie.

6. À l'aide de l'approximation par une variable de Poisson, montrez qu'à $t = 3 \ln(10) / \lambda$ (c'est à peu près 10 fois la demi-vie) on a

$$\mathbb{P}(\{|N_t - \mathbb{E}(N_t)| \geq 0.025 \times \mathbb{E}(N_t)\}) \geq 1/2.$$

Indication : $\exp(10) \approx 2.2 \times 10^4$; $9! = 362\,880$

3. Jeu de carte – 3 points

Patrick joue au bridge avec des amis. On lui distribue 13 cartes (d'un jeu de 52 cartes).

1. Combien y a-t-il de mains (main=ensemble de 13 cartes) possibles pour Patrick ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 13 cartes de la même couleur ? (Il y a 4 couleurs : ♠, ♥, ♦, ♣)
3. Montrer que la probabilité d'obtenir une répartition équilibrée (4♠, 3♥, 3♦, 3♣) est supérieure à la probabilité d'obtenir (4♠, 4♥, 3♦, 2♣).
4. Montrer que, si l'on ne spécifie pas les couleurs, une répartition (4,4,3,2) est plus probable qu'une répartition équilibrée (4,3,3,3).

4. Dernier exercice – 6 points (1pt, 2pt, 2pt, 1pt)

Soit X et Y deux variables aléatoires de loi normale centrée réduite. On suppose qu'elles sont indépendantes. Elles représentent les coordonnées du point d'impact d'une flèche lancée sur un mur infini. À ce mur est accrochée une cible de rayon 1 centrée en $(0, 0)$. On "tape dans le mille" lorsque $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ est plus petit que $1/4$, on obtient alors 1000 points. Si on touche la cible sans taper dans le mille et que $XY > 0$ (cela concerne deux quarts de plan) on obtient 500 points. Si en revanche $XY < 0$, ce qui concerne les deux autres quarts de plan, on a 300 points. A côté de la cible on n'a pas de points.

1. Faire un dessin de la cible avec ses régions et les points correspondants.

On suppose $X = R \cos(\Theta)$ et $Y = R \sin(\Theta)$ pour R et Θ des variables aléatoires à valeurs dans $]0, 1[$ et $]0, 2\pi[$ respectivement. Il sera pratique d'utiliser T le changement de coordonnées inverse vérifiant $T(x, y) = (r, \theta)$ sans en calculer l'expression explicite.

2. Montrer que (R, Θ) suit la loi de densité $\frac{r \cdot \exp(-r^2/2)}{2\pi}$.
3. Quelle est la loi du nombre N de points obtenus par le tireur (après un tir) ?
4. Après deux tirs indépendants le tireur totalise moins de 400 points. Sachant cela, avec quelle probabilité, a-t-il tiré deux fois à côté de la cible ?

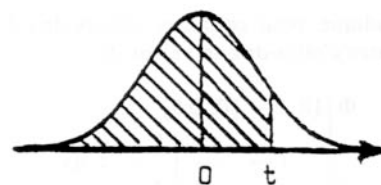
FIN DE L'ÉPREUVE

LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Cette table indique, pour certaines valeurs de t , la valeur de la surface hachurée, c'est-à-dire la valeur de :

$$F \mid \mathbb{R}_+ \rightarrow [0,5; 1]$$

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000