Examen du 10 janvier 2012
Correction sommaire

1. Simulation numérique

1. Par exemple $\Theta = \pi \times U - 2\pi$
et passer par la fonction de répartition

2. $F_R(t) = \mathbb{P}(R \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mathbb{P}(R \leq t) = \mathbb{P}\left(\sqrt{-2\ln(1-V)} \leq t\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(-2\ln(1-V) \leq t^2\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\ln(1-V) \geq -\frac{t^2}{2}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(1-V \geq \exp\left(-t^2/2\right)\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(V \leq 1-\exp\left(-t^2/2\right)\right)$$
$$= \exp\left(-t^2/2\right) \quad \text{car } V \text{ est uniforme.}$$

Par ailleurs si $t \geq 0$ $\displaystyle\int_0^t r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)dr = \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^t$
$$= 1 - \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)$$

ainsi R admet pour densité la fonction f

3. Soit φ une fonction test à deux variables

$$\mathbb{E}(\varphi(X,Y)) = \mathbb{E}(\varphi(R\cos\theta, R\sin\theta))$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\frac{1}{2\pi}\, r\exp\left(\frac{-r^2}{2}\right)dr\,d\theta$$

calcul du jacobien :

$$\text{“}\frac{dr\,d\theta}{dx\,dy}\text{”} = \left(\text{“}\frac{dx\,dy}{dr\,d\theta}\text{”}\right)^{-1} \quad \text{or} \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

ainsi $$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right|$$
$$= r$$

donc $$E(\varphi(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,\cancel{\frac{r}{r}}\,\frac{\exp\left(\frac{-x^2-y^2}{2}\right)}{2\pi}\,dx\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,\underbrace{\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{densité gaussienne}}\,\underbrace{\frac{\exp(-y^2/2)}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{densité gaussienne}}\,dx\,dy$$

Ainsi X et Y sont de loi $\underline{\mathcal{N}(0,1)}$ et sont <u>indépendantes</u>.

4. (Hors-Barème).

il aurait fallut poser $X = \Phi^{-1}(U)$ où Φ est la fonction de répartition F_Z de $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. On ne connaît pas d'expression d'un tel Φ, d'où le problème.

2 Unexercice sans histoire

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)\, e^{-(x+y)}\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(e^{-y}\left(\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx + y \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx\right)\right)$

or $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ et $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x} = 1$

d'où Y admet pour densité $\begin{cases} \frac{1}{2}(1+y)\, e^{-y} & \text{sur } [0,+\infty[\\ 0 & \text{en dehors} \end{cases}$

De même X admet la même densité par symétrie des variables.

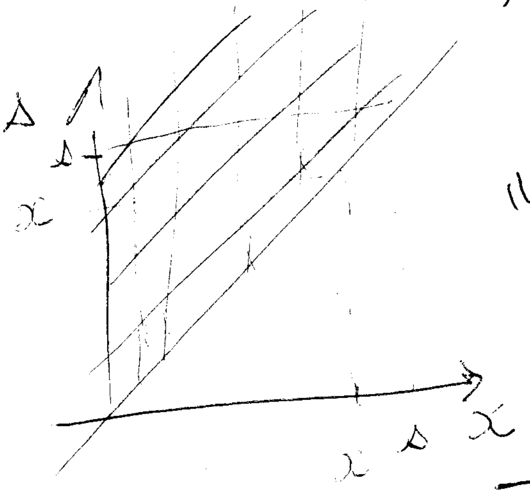
2. Le produit des densité de X et Y n'est pas la densité de (X,Y). Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

D'ailleurs $\frac{1}{4}(1+y)(1+x)\, e^{-(x+y)}$ vaut $\frac{1}{2}$ en $(0,0)$ alors que $\frac{1}{2}(x+y)\, e^{-(x+y)}$ vaut 0.

3. a) $\mathbb{E}(\varphi(X+Y)) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, \frac{1}{2}(x+y)\, e^{-(x+y)}\, dx\, dy$

b) quand (x,y) décrit $[0,+\infty[^2$ (x,s) décrit l'ensemble $\{0 \leq x \leq s\}$ exactement $\frac{\partial s}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial s}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$

Donc $\mathbb{E}(\varphi(X+Y)) = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} \varphi(s) \frac{1}{2} s e^{-s} \boxed{1} \, ds \right) dx$ ④



"$\frac{dx\,dy}{dx\,ds}$" $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right|^{-1}$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{s} \varphi(s) \frac{1}{2} s e^{-s} \, dx \right) ds$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(s) \, \frac{s^2}{2} e^{-s} \, ds$$

ainsi $(X+Y)$ admet pour densité $s \in [0,+\infty[\to \frac{s^2}{2} e^{-s}$.

En effet $\mathbb{E}(\varphi(S)) = \int_0^{+\infty} \varphi(s) \, \frac{s^2}{2} e^{-s} ds$ quelle que soit la fonction-test S.

3. <u>Golf</u>

1. Probabilité de rater les n premiers tirs

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

L'événement "tout rater" est $R_\infty = \bigcap R_n$ où R_n, l'événement "rater n-fois" a probabilité $\frac{1}{1} \times \dots \times \frac{1}{n}$.

Ainsi $\mathbb{P}(R_\infty) \leq \mathbb{P}(R_n)$ pour tout n donc

$$\mathbb{P}(R_\infty) = 0 .$$

2. Probabilité de réussir au n-ième coup
$\mathbb{P}(X=n)$ où X est le numéro du coup où la balle rentre.

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\cdots\frac{1}{n-1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{n-2}\right)\times\frac{1}{n}$$

car $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$

ainsi $$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{1}\times\cdots\times\frac{1}{n-2}\right)\times\frac{1}{n}\times n$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e^{1}=e$$

(on se rappelle que $\exp(x)=\sum\frac{x^n}{n!}$)

Il faut en moyenne $e\sim 2{,}718$ coup pour mettre la balle dans le trou.

3. même esprit. On peut parvenir au résultat en dérivant la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n=g(x)$

$$g(x)=x^2\exp(x)$$
d'où $$g'=(2x+x^2)\exp(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{n}n^2x^{n-1}$$

donc $g'(1)=3e=\mathbb{E}(X^2)$

ainsi $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=3e-e^2=(3-e)e$

4. Dagobert et les alevins

1. $$\mathbb{P}(X=3) = \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbb{P}(\{X=3\} \cap \{N=n\})$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{P}(X=3 \mid N=n)$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-5} \frac{5^n}{n!} \binom{n}{3} \frac{1}{2^3} \frac{1}{2^{n-3}}$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} e^{-5} \frac{5^n}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{3!\,(n-3)!} \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{e^{-5}}{3!} \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n \frac{1}{(n-3)!} = \frac{e^{-5}}{3!} \left(\frac{5}{2}\right)^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{e^{-5}}{3} \left(\frac{5}{2}\right)^3 e^{5/2}$$

$$= \frac{(5/2)^3}{3!} e^{-5/2}$$

2. De même (remplacer tous les 3 en k)

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{(5/2)^k}{k!} e^{-5/2} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

d'où X suit une loi de Poisson de paramètre $5/2$.