Examen : initiation aux probabilités.

Durée : 120 minutes

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable sont interdits pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il peut consulter les enseignants-surveillants. Barème : ex. 1– 7pts ; ex. 2– 5pts ; ex. 3– 4pts ; ex. 4– 4pts. Les questions "hors-barême" donnent droit à des points bonus. Les exercices 1 et 2 font intervenir des variables aléatoires continues, les deux autres des variables discrètes.

1. Simulation numérique

On veut simuler deux variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes à partir de U et V, indépendantes et de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

1. Comment peut-on obtenir $\Theta \hookrightarrow \mathcal{U}([-\pi,\pi])$ à partir de U ? On justifiera sa réponse.
2. Montrer que $R = \sqrt{-2\ln(1-V)}$ admet pour densité la fonction
$$f : r \in [0,+\infty[\mapsto f(r) = r\mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

On pose maintenant $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$ si bien que $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ et $\Theta = 2\arctan\left(\frac{Y}{X+\sqrt{X^2+Y^2}}\right)$.

3. Montrer que X ainsi que Y suivent la loi normale centrée réduite et qu'elles sont de plus indépendantes (3pts).
   On pourra utiliser le fait que les jacobiens de (x,y) par rapport à (r,θ) d'une part, et de (r,θ) par rapport à (x,y) d'autre part sont inverses l'un de l'autre. Si on ne veut pas tenir compte de cette remarque, il pourra être utile de se rappeler que la dérivée de $\arctan(x)$ *est* $1/(1+x^2)$.
4. (Hors-barême) Quelle est le principe utilisé à la question 2. pour simuler R à partir d'une loi uniforme (ici V) ? Pourquoi ne peut-on pas simuler numériquement la loi normale centrée réduite (celle de X ou Y) directement par cette méthode ?

2. Un exercice sans histoire

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires positives, admettant pour densité $\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}$ sur $[0,+\infty[^2$.

1. Donner les lois marginales de X et de Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On s'intéresse à la loi suivie par $S = X+Y$. Soit φ une fonction "test" (continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On pourra suivre les étapes détaillées ci-après.
   (a) Exprimer $\mathbb{E}(\varphi(X+Y))$ sous forme intégrale ;
   (b) effectuer un changement de variable *à une variable sous une intégrale ou bien à deux variables* $(x,y) \mapsto (x,s)$ *en faisant attention au domaine de définition ainsi qu'au jacobien* ;
   (c) conclure en justifiant.

3. Golf

On modélise un trou de golf de la façon suivante : après $k-1$ échecs, la probabilité de mettre la balle dans le trou est de $1-1/k$. On pourra noter X le nombre de tirs et $R_k = \{X > k\}$ l'evénement "les k premiers tirs sont ratés".

1. Montrer que la probabilité de ne jamais mettre la balle dans le trou est nulle, c'est-à-dire qu'on y parvient toujours à force de tentatives. Autrement dit $\mathbb{P}(X \geq +\infty) = 0$.
2. Quel est le nombre moyen de coups nécessaires pour finir le parcours ? On demande donc de calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. (Hors-barême) Quelle est la variance de X ?

4. Dagobert et les alevins

Dagobert jette son épuisette dans l'étang. On sait que N, le nombre d'alevins recueillis lors de cette pêche suit une loi de Poisson de paramètre 5. Chacun des alevins pêchés est mâle ou femelle avec probabilité 1/2 et indépendemment des autres. On note X le nombre aléatoire de femelles.

1. Avec quelle probabilité aura-t-on $X = 3$? *(décomposer selon les événements $N = k$ pour toutes les valeurs de k possibles et faire intervenir une formule de probabilités totales)*
2. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 5/2.

FIN DE L'ÉPREUVE

Correction sommaire sur le site Moodle.