Contrôle continu 1

Calcul des probabilités ; L3 physique ; durée : 2h

13 octobre 2016

Notations Pour un ensemble quelconque E, une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et des réels α et β, on note $\alpha f + \beta$ la fonction

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha \times f(x) + \beta. \end{aligned}$$

Soit (Ω, Σ) un espace probabilisable et $\omega \in \omega$. On rappelle que la masse de Dirac en ω est définie par

$$\begin{aligned} \delta_\omega : \Sigma &\to \{0, 1\} \\ A &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Mise en garde Il est nécessaire de justifier chacune des réponses. D'autre part, les notations (a, b, c), $\{a, b, c\}$, $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ n'ont pas la même signification.

Exercice 1

1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.
   (a) La fonction $\mu + 1$ est-elle une mesure sur $(X, \mathcal{T})$?
   (b) La fonction $2 \times \mu$ est-elle une mesure sur $(X, \mathcal{T})$?
   (c) Dans quel cas la fonction $\frac{1}{\mu(X)} \times \mu$ est-elle une probabilité ?
2. Soit (Ω, Σ, P) un espace probabilisé. Dans quels cas :
   (a) la fonction $2P$ est-elle une probabilité sur (Ω, Σ) ?
   (b) la fonction $1 - P$ est-elle une probabilité sur (Ω, Σ) ?
   (c) la fonction $P/2 + 1/2$ est-elle une probabilité sur (Ω, Σ) ?
   (d) la fonction P^2 est-elle une probabilité sur (Ω, Σ) ?
   (e) si $\omega \in \Omega$, la fonction $\frac{1}{2} \times P + \frac{1}{2} \times \delta_\omega$ est-elle une probabilité sur (Ω, Σ) ?
   (f) si $\omega \in \Omega$, la fonction $\delta_\omega(\Omega) \times P$ est-elle une probabilité sur (Ω, Σ) ?

Exercice 2 Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $B \in \mathcal{F}$. Montrer que $\mathcal{G} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{F}\}$, est une tribu sur B.

Exercice 3 On sait que $B = C_1 \cup C_2$ avec $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. D'autre part,

$$P(A \mid C_1) = 1/4 ; \quad P(A \mid C_2) = 1/2 ; \quad P(C_1) = 1/3 ; \quad P(C_2) = 1/2 \quad \text{et} \quad P(A \mid \bar{B}) = \cancel{1/7}.$$

3/4

1. Quelle est la probabilité de A sachant B ?
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

1. Rappeler le domaine de définition de X.
2. Calculer l'espérance des variables $\dfrac{1}{1 + X}$ et $\dfrac{1}{n + 1 - X}$.

$P(A|B)$

$P(B) =$ ✓

$P(A \cap B) =$ P

$A \cap B = A \cap (C_1 \cup C_2)$

$A \cap C_1 \cup A \cap C_2$

Exercice 5 Soit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue.
2. Calculer la densité de probabilité associée à F.
3. Calculer l'espérance de X, l'espérance de $\sqrt{X}$ et en déduire la variance de $\sqrt{X}$.

Exercice 6 Soit $\theta > 0$ et

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\theta x} & \text{si } x < 0 \\ 25 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\theta x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité.
2. Calculer la fonction de répartition associée à F.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7 Soit $E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, $\Omega = \{0,1,2\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ et $p \in]0,1[$.

1. Décrire Σ et donner son cardinal.
2. Soit

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{T} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \operatorname{card}(A). \end{aligned}$$

   μ est-elle une mesure ? Une probabilité ?
3. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \underset{E}{\cancel{X}} &\to \Omega \\ u &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u \in \{a,c,h,i\} \\ 1 & \text{si } u \in \{b,e,f,g\} \\ 2 & \text{si } u \in \{d\} \end{cases} \end{aligned}$$

   Quelles sont les images réciproques $\varphi^{-1}(\{0\})$, $\varphi^{-1}(\{1\})$, $\varphi^{-1}(\{2\})$ et $\varphi^{-1}(\{0,1\})$?
4. Quelle est la mesure image de μ par φ, que l'on appellera ν ? Donner pour chaque élément A de l'ensemble de définition de ν la valeur de $\nu(A)$.
5. Soit $Q = \frac{1}{9}\nu$. Quelle est la particularité de Q ? Justifier.
6. Soit une variable aléatoire

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 - x. \end{aligned}$$

   Quel est l'ensemble de définition de X ?
7. Quelle est la mesure image de X par ν ? Décrire cette mesure, que l'on notera Q_X.