Contrôle continu 2

Calcul des probabilités ; L3 physique ; durée : 2h

17 novembre 2016

Préambule

Il est nécessaire de justifier chacune des réponses et de soigner la présentation.
Une loi Bêta (α, β) avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ a pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une loi $\Gamma(k, \theta)$ avec $k > 0$ et $\theta > 0$ a pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta} & \text{si x>0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \text{ et } B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Exercice 1. Soit

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) &\mapsto f_{(X,Y)}(x,y) \end{aligned}$$

la densité jointe du couple de variables (X, Y), $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la densité de la v.a. X et $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la densité de la v.a. Y.

1. De quelle variable ou couple de variables les fonctions suivantes sont elles les densités ?
   (a) $g_1(t) = \int f_{(X,Y)}(t, z)\, dz$
   (b) $g_2(x, y) = f_{(X,Y)}(y, x)$
   (c) $g_3(x, y) = f_{(X,Y)}(x, -y)$
2. Donner l'expression de la densité des variables ou couples de variables suivants :
   (a) $Z_1 = |X|$
   (b) $(Z_2, T_2) = (\sigma X, Y)$ avec $\sigma > 0$
   (c) $Z_3 = X + Y$ lorsque X et Y sont indépendantes

Exercice 2. Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ indépendantes.

1. Quelle est la densité de $W = \exp\{X\}$?
2. Quelle est la loi de $Z = X/Y$?
   Indications : on pourra commencer par calculer la loi jointe du couple $(Z, T) = \Phi(X, Y)$ avec

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) &\mapsto (x/y,\, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \\ (z,t) &\mapsto (zt,\, t)\end{aligned}$$

et

$$|J_{\Phi^{-1}}| = \begin{vmatrix} t & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |t|\,.$$

3. Vérifier que lorsque $\lambda = \mu$, on obtient

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et calculer l'espérance et la variance de $W = \dfrac{1}{Z+1}$ dans ce cas.

Exercice 3. 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$.

   (a) Quelle est la fonction de répartition de X_1 ? On précisera sa définition sur tout l'axe réel.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de X_1.

2. Soit $V = 3X_1 + 1/4$ et $W = \lfloor V \rfloor$, la partie entière de V, i.e.

$$\begin{aligned}\lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}\,.\end{aligned}$$

   (a) Quelle est la densité de V ?

   (b) Quels sont le support et la loi de W ?

   (c) Calculer $E[W]$.

3. On définit $\forall n \in \mathbb{N}$ la variable $Y_n = X_n^2$.

   (a) Calculer la densité de Y_1.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de Y_1.

   (c) Donner la valeur des trois quartiles de la loi de Y_1.

   (d) Quelle est la loi de $Y_\infty = \lim_{n\to\infty} Y_n$ si cette limite existe ?

4. On définit $\forall n \in \mathbb{N}$ la variable $Z_n = n \min(X_1, \ldots, X_n)$.

   (a) Quel est le support de $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} Z_n$?

   (b) Quelle est la loi de Z_∞ si cette limite existe ?

5. Soit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   (a) Appliquer la loi des grands nombres à $\bar{X}_n$.

   (b) Appliquer le théorème central limite à $\bar{X}_n$ en écrivant de manière explicite les constantes qui interviennent.

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de v.a. de densité

$$f(x,\, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $E[X]$, $E[Y]$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et les lois marginales de X et de Y.