UFR de Sciences Physiques Université de Strasbourg

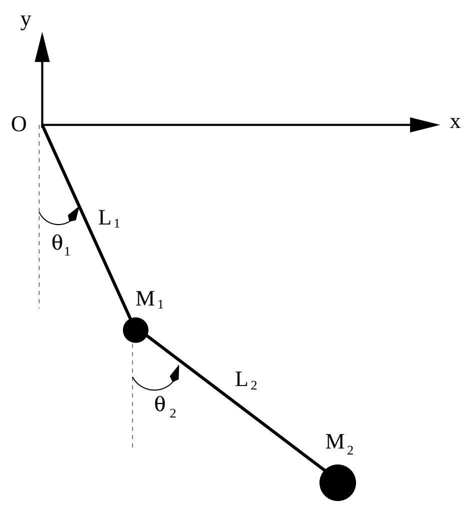
LICENCE 3 DE PHYSIQUE — ANNÉE 2010/2011

Projet de Calcul scientifique

Étude du mouvement du pendule double

Remarques préliminaires

- Si vous avez toute latitude pour coopérer entre vous, chaque étudiant devra rendre un **rapport individuel** le jour de l'examen.
- L'usage d'un traitement de texte pour la rédaction du rapport n'est pas obligatoire mais il sera tenu compte du soin de la présentation.
- le code source devra être imprimé. Le programme doit être **lisible**. Cela signifie que vous devez indenter correctement votre programme, qu'il doit être commenté, que les variables doivent être commentées et/ou explicites.
- Les figures doivent comporter un titre, une légende pour les axes et des unités.
- On travaillera en unités S.I. (kg, m, s). Les angles en FORTRAN 90 sont à rentrer en radians.
- Toutes les variables réelles seront à déclarer en double précision comme par exemple : `REAL(KIND=8):: x`
- On utilisera un fichier d'entrée pour les paramètres ajustables (masses, conditions initiales, etc.).
- Un non respect de ces consignes diminuera la note finale.



Introduction

On propose d'étudier le mouvement du pendule double à l'aide de méthodes numériques. On utilisera l'algorithme de Runge Kutta d'ordre 4 **(RK4)** pour la résolution des équations différentielles.

Il s'agit d'un pendule rigide à l'extrémité duquel on attache un autre pendule rigide. Les deux tiges inextensibles de longueurs L_1 et L_2 sont de masse nulle. Les 2 masses aux extrémités sont de masses M_1 et M_2, qu'on considérera comme ponctuelles. Le pendule double est donc fixé en O et articulé librement en M_1. Le mouvement se déroule dans un plan de coordonnées horizontales x et verticales y. On considèrera que les deux tiges peuvent se "croiser" sans problème. L'angle que fait le pendule 1 avec la verticale est noté θ_1 et l'angle que fait le pendule 2 avec la verticale est noté θ_2. Ces angles sont notés positivement dans le sens trigonométrique.

On notera respectivement :

- x_i = abscisse du pendule i. $(i = 1, 2)$.
- y_i = ordonnée du pendule i.
- $\dot{x_i}$ = vitesse horizontale du pendule i.
- $\dot{y_i}$ = vitesse verticale du pendule i.
- $\ddot{x_i}$ = accélération horizontale du pendule i.
- $\ddot{y_i}$ = accélération verticale du pendule i.
- $\dot{\theta_i} = \omega_i$ = vitesse de rotation angulaire du pendule i.
- $\ddot{\theta_i} = \dot{\omega_i}$ = accélération de rotation angulaire du pendule i.

Dans un premier temps on prendra les valeurs numériques suivantes : $L_1 = 25\ cm$; $L_2 = 25\ cm$; $M_1 = 200\ g$; $M_2 = 200\ g$; $g = 9.81\ m.s^{-2}$.

Équations du mouvement

Dans une première partie, on demande d'établir les équations du mouvement. Si un traitement lagrangien permet d'établir les équations rapidement, il n'en est pas de même avec l'approche classique newtonienne, que l'on demande d'utiliser ici. On procédera donc par étape et avec méthode.

1. Exprimer x_1, y_1, x_2, y_2 en fonction des θ_i, puis $\dot{x_1}$, $\dot{y_1}$, $\dot{x_2}$, $\dot{y_2}$ en fonction des θ_i et $\dot{\theta_i}$ et enfin $\ddot{x_1}$, $\ddot{y_1}$, $\ddot{x_2}$, $\ddot{y_2}$ en fonction des θ_i, $\dot{\theta_i}$ et $\ddot{\theta_i}$.
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour M_1 et pour M_2. On notera T_1 et T_2 les tensions des tiges 1 et 2, c'est-à-dire les forces internes des barres qui transmettent la force de fixation des pendules à leur point d'attache.
3. Montrer qu'en éliminant T_1 et T_2 des équations, on obtient le système suivant :

$$\ddot{\theta_1} L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2 \ddot{\theta_2} - L_1 \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\theta_1} L_1 (M_1 + M_2) + M_2 L_2 \ddot{\theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta_1}^2 M_2 L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (M_1 + M_2) g \sin(\theta_1) = 0 \quad (2)$$

4. En posant $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, combiner les équations 1 et 2 pour obtenir le système suivant :

$$\ddot{\theta_1} = \frac{-\dot{\theta_1}^2 M_2 L_1 \cos(\Delta\theta)\sin(\Delta\theta) - \dot{\theta_2}^2 M_2 L_2 \sin(\Delta\theta) - (M_1 + M_2) g \sin(\theta_1) + M_2 \cos(\Delta\theta) g \sin(\theta_2)}{(M_1 + M_2) L_1 - M_2 L_1 \cos^2(\Delta\theta)} \quad (3)$$

$$\ddot{\theta_2} = \frac{\dot{\theta_2}^2 M_2 L_2 \cos(\Delta\theta)\sin(\Delta\theta) + (M_1 + M_2)\left(g \sin(\theta_1)\cos(\Delta\theta) + L_1 \dot{\theta_1}^2 \sin(\Delta\theta) - g \sin(\theta_2)\right)}{(M_1 + M_2) L_2 - M_2 L_2 \cos^2(\Delta\theta)} \quad (4)$$

Avec :

$$\dot{\theta_1} = \omega_1 \quad (5)$$

$$\dot{\theta_2} = \omega_2 \quad (6)$$

$$\ddot{\theta_1} = \dot{\omega_1} \quad (7)$$

$$\ddot{\theta_2} = \dot{\omega_2} \quad (8)$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Soit une équation différentielle du type :

$$
\begin{aligned}
y' = \frac{dy}{dt} &= f(t, y) \quad (9)\\
y(t_0) &= y_0 \quad (10)
\end{aligned}
$$

Pour rappel, la méthode RK4 est résumée par les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n) \quad (11)\\
k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \quad (12)\\
k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \quad (13)\\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + h) \quad (14)\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)
\end{aligned}
$$

Où h est le pas en temps (autrement dit $t_{n+1} - t_n = h$),

Écriture du programme

Les équations 5, 6, 3-7 et 4-8 constituent 4 équations différentielles du premier ordre que l'on peut résoudre à l'aide de la méthode **RK4**.

5. Écrire un programme permettant de résoudre le système. On prendra comme pas en temps 10^{-5} s pour commencer et on fera évoluer le système sur une quinzaine de secondes, à partir de conditions initiales ($\theta_1,\ \theta_2,\ \dot{\theta}_1,\ \dot{\theta}_2$) de votre choix. Le programme devra remplir un fichier de sortie utilisable par xmgrace pour tracer les courbes demandées par la suite.
   indice : pour tester le programme, on pourra éventuellement immobiliser le pendule 1 dans un premier temps.
6. Avec un pas en temps petit, le fichier de sortie peut rapidement être très volumineux. On se contentera de ne remplir le fichier de sortie que tous les 100 ou 1000 pas de temps pour gagner de la place.
   indice : Pour cela, on peut utiliser une variable entière n, initialisée à zéro, que l'on incrémentera de 1 à chaque pas en temps. On teste si $n = 1000$ et si c'est le cas, on réinitialise cette variable à zéro et on imprime les valeurs désirées.
7. Tracer $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$, dans le plan (x, y) pour des petites oscillations, pendant une quinzaine de secondes.
8. Faire de même avec des angles plus grands, ou une vitesse initiale plus élevée, de telle sorte que le pendule 2 puisse faire des tours complets.
9. Vérifier la conservation d'énergie du système. Pour cela on calculera à chaque pas en temps les énergies potentielles, cinétiques et totales puis on tracera l'énergie totale du système en fonction du temps. Le système est-il stable d'un point de vue énergétique ?
10. Tracer les portraits de phase, c'est-à-dire $\dot{\theta}_2$ en fonction de θ_2 pour différentes énergies totales initiales (on cherchera entre quelques dixièmes de Joules et quelques dizaines de Joules). Observer le changement de régime lorsqu'on augmente cette énergie initiale. Commenter.
11. Dans le régime à grande énergie totale, tester deux conditions initiales très proches. Tracer sur une même figure θ_2 en fonction du temps pour les deux conditions initiales. Pourquoi parle-t-on de sensibilité aux conditions initiales ?

12. L'ajustement du pas en temps permet d'optimiser le temps de calcul quand la vitesse d'évolution du système est très variable. Rajouter un pas variable en temps qui s'ajuste á chaque pas en fonction d'une précision demandée (par exemple $\epsilon = 10^{-6}$).
    indice : pour chaque pas h, on comparera l'évolution de θ_2 entre une itération réalisée avec un pas h (valeur obtenue notée θ_2^h) et 2 itérations réalisées avec un pas $h/2$ (valeur obtenue notée $\theta_2^{h/2}$).
    - Si la différence $\theta_2^h - \theta_2^{h/2}$ entre les deux est inférieure à ϵ, on passe à l'étape suivante en augmentant h à la prochaine étape.
    - Si la différence entre les deux est supérieure à ϵ, on ne passe pas à l'étape suivante et on recommence le calcule en diminuant h.
    - Pour le nouveau pas h_{n+1}, on peut prendre :

$$h_{n+1} = h_n \left(\frac{\theta_2^h - \theta_2^{h/2}}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{5}} \tag{16}$$

13. Si vous voulez aller plus loin (facultatif)
    - Introduire une force de frottement dans le système.
    - Introduire un mouvement entretenu dans le système, c'est-à-dire que $\omega_1 = \omega =$ constante. Étudier les phénomènes de résonnances pour $\omega = \sqrt{g/L_2}$ pour les petites oscillations.