UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

UFR Physique et Ingénierie

Examen d'Electromagnétisme de la Matière et Relativité Restreinte – Licence 3

(Session de mai 2011, durée 2 heures)

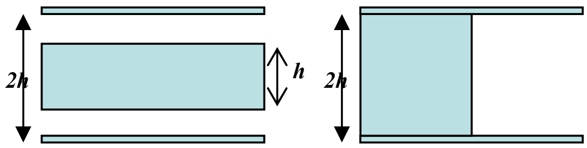
Pas de calculatrices et pas de documents

Exercice 1 (8 points)

A. L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est rempli avec deux couches de diélectriques linéaires de constantes diélectriques respectives K_1 et K_2. Chaque couche a une épaisseur h et la distance entre les armatures est de $2h$. Les densités de charges électriques libres sur les armatures, sont respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$.

1. Déterminer le déplacement électrique $\boldsymbol{D}$ et le champ électrique $\boldsymbol{E}$ dans chaque couche.
2. Déterminer la polarisation électrique $\boldsymbol{P}$ dans chaque couche.
3. Déterminer la différence de potentiel entre les armatures du condensateur.
4. Trouver les emplacements et les quantités de charges électriques liées.
5. A partir des charges liées et les charges libres, recalculer le champ électrique dans chaque couche et comparer les résultats à ceux de la première question.

B. On suppose qu'on dispose d'un diélectrique linéaire de constante diélectrique K, pour remplir la moitié de l'espace entre les armatures d'un condensateur plan d'épaisseur $2h$. De quelle fraction la capacité de ce condensateur sera-t-elle augmentée dans les deux cas de figures suivantes :



C. On considère une sphère en matériau diélectrique de constante diélectrique K et de rayon R, dans laquelle on injecte de la charge libre de densité constante ρ_f. Déterminer le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de cette sphère.

Exercice 2 (6 points)

On se propose de comparer le champ magnétique d'une sphère de rayon R, de densité d'aimantation M constante, et d'une autre sphère de même rayon et de densité de charge surfacique σ, tournant avec une vitesse angulaire ω constante.

1. Sachant que pour un dipôle magnétique le potentiel vecteur au point M situé à une distance r de ce dipôle est donné par $\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{r}}{r^2}$, où $\vec{m}$ est le moment dipolaire magnétique et $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, montrer que le potentiel vecteur $\vec{A}$ d'un matériau aimanté est donné par :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \frac{\vec{M}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3} d^3r'$$

   où $\vec{M}$ est la densité d'aimantation. Donner la définition de cette densité d'aimantation.

2. Déterminer le potentiel vecteur dipolaire magnétique et le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère de densité d'aimantation $\vec{M}$. Le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ en coordonnées curvilignes (où $d\vec{l} = f du\,\hat{u} + g dv\,\hat{v} + h dw\,\hat{w}$) est donné par :

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{fgh}\begin{vmatrix} f\hat{u} & g\hat{v} & h\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ fA_u & gA_v & hA_w \end{vmatrix}.$$

3. Déduire que la sphère de charge surfacique $\boldsymbol{\sigma}$ et tournant avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ constante est équivalente à la sphère fixe de densité d'aimantation $\vec{M}$. Déterminer M en fonction de σ, ω et le rayon R de la sphère. On rappelle que la densité de courant surfacique est donnée par $\vec{K} = \sigma\vec{v}$ et que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Exercice 3 (6 points)

Dans le référentiel inertiel (S_0) le champ électrique d'un électron au repos de charge électrique q est donné par:

$$\vec{E}_0(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_0^2}\hat{r}_0,$$

où r_0 est la distance de la charge au point où on veut calculer le champ électrique E_0, et $\hat{r}_0$ un vecteur unitaire le long de $\vec{r}_0$.

(1) Montrer que les composantes E_α (α=x, y ou z) du champ électrique dans le référentiel inertiel S en mouvement avec une vitesse v vers la droite par rapport à S_0, sont données par :

$$\begin{cases} E_x = E_{x_0} \\ E_y = \gamma E_{y_0} \\ E_z = \gamma E_{z_0} \end{cases},$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ (c étant la vitesse de la lumière dans le vide) et les E_α (α=x_0, y_0 ou z_0) sont les composantes du champ électrique dans le référentiel S_0. Pour ce faire, il faut déterminer le champ électrique d'une plaque uniformément chargée avec une densité de charge surfacique σ en mouvement uniforme de vitesse v par rapport à S_0. Indiquer les différents mouvements de la plaque.

(2) Ecrire l'expression de E en fonction des coordonnées du référentiel S en utilisant la transformation de Lorentz et montrer que cette expression est donnée par :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(1-v^2/c^2)}{\left[1-\left(v^2/c^2\right)\sin^2\theta\right]^{3/2}}\frac{\hat{r}}{r^2},$$

où θ est l'angle entre la direction du champ électrique et la vitesse v, r la distance entre l'électron et le point P, et $\hat{r}$ un vecteur unitaire parallèle au vecteur $\vec{r}$.

(3) Montrer que le théorème de Gauss est valide dans le référentiel du laboratoire ainsi que dans le référentiel où l'électron est au repos (conservation de la charge par une transformation de Lorentz):

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).d\vec{S} = \oiint_{\Sigma_0} \vec{E}_0(\vec{r}_0).d\vec{S}_0,$$

où E_0 est le champ électrique dans le référentiel inertiel de l'électron.

Rappel : $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\left(a^2+x^2\right)^{1/2}} + C$

(4) Le champ magnétique de l'électron dans le référentiel S est donné par : $\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}(\vec{r})$. Déterminer le champ magnétique de l'électron, et montrer que sa limite non-relativiste est donnée par (noter le changement de signe):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}.$$

(5) Utiliser cette dernière expression pour écrire la loi de Biot-Savart pour un fil électrique parcouru par un courant I dans un référentiel ($Oxyz$) quelconque.