

Contrôle Continu - Analyse - PSI

Durée : 1h

12 Octobre 2011

Appareils électroniques et documents non autorisés

Exercice 1 1. Trouver la limite des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) \frac{3n^2 + n + 1}{2 - n^2},$$

$$v_n = \frac{\cos(e^{\sin n}) + 12\sqrt{n}}{n+3}.$$

2. Soit $(w_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$w_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Par exemple, on a $w_1 = \frac{1}{2}$, $w_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $w_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$.

(a) Montrer que (w_n) est croissante.

(b) Montrer que $w_n \leq 1$.

(c) Montrer que la suite (w_n) est convergente (On ne demande pas de calculer sa limite).

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$.

1. Montrer que

$$\forall 0 \leq x < y \text{ on a } f(x) < f(y)$$

et que

$$\forall 0 \geq x > y \text{ on a } f(x) < f(y).$$

2. Montrer que f est bornée. Donner les valeurs de $\inf(f)$ et de $\sup(f)$.

3. Montrer que f est injective sur $[0, +\infty[$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Combien y a-t-il d'antécédents (de préimages) par f ?

Exercice 3 Soient $P_1(X) = X^4 - 2X^2 + 2$ et $P_2(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $1+i$ et $1-i$.

2. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{2}$. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3. Trouver sous forme algébrique les racines de P_1 dans \mathbb{C} .

4. Montrer que $1, i$ et $-i$ sont les racines complexes de P_2 .

5. Effectuer la division euclidienne de P_1 par P_2 .

6. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{P_1}{P_2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .