Examen de mathématiques L3/ESA - Décembre 2008

1. Un système intégrateur est il un système linéaire et invariant dans le temps ?
2. Calculer :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sin(\pi x)}{\pi x} dx$$

3. Calculer la transformée de Laplace du signal $x(t) = \cos \omega_0 t$ en utilisant les propriétés de la TL des signaux causaux "périodiques".
4. On considère la fonction triangle

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| \leq 1 ; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (a) Calculer la dérivée de cette fonction, et exprimer $\Lambda'(t)$ au moyen de deux versions **translatées** de la fonction **porte normalisée** notée $\Pi(t)$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq 1/2 ; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (b) En appliquant la TF à chaque membre, en déduire la transformée de Fourier de la fonction triangle.

   (c) Retrouver le résultat précédent en utilisant la propriété (à montrer) $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$.
5. Montrer

   (a) La TF transformée de Fourier d'un signal pair et réel est paire et réelle.

   (b) La TF d'un signal impair et réel est imaginaire pur.
6. Étudier la convergence uniforme et simple de la fonction suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \in [1, n] ; \\ 0, & \text{si } x \in]n, +\infty[. \end{cases}$$

7. Déterminer le *domaine de convergence* de la série suivante :

$$u_n(x) = \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$$

8. On considère une fonction $f(t) = t^2$ de période 2π.

   (a) Rappeler l'écriture générale du développement de f en série de Fourier.

   (b) Comment calcule t-on la puissance de f ? En *déduire* :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} u^2 e^{-inu} du = 0$$

   (c) Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$