Examen de mathématiques L3/ESA - Décembre 2010

I. Soit la fonction $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{x}{n}\right)$ définie sur $[0, 2\pi]$.

$g_n(x) \leq 2\sin(\frac{\pi}{n})$

(a) Montrer que $f_n(x)$ converge simplement vers une fonction $f(x)$ à préciser ;

(b) Soit la fonction $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Montrer que pour $n \geq 2$, $g_n(x) \leq 2\sin(\pi/n)$. $f_n(x)$ converge t-elle uniformément ?

Bonus

(c) En calculant $f(n\pi/2)$ et $f_n(n\pi/2)$ montrer que $f_n(x)$ n'est uniformément convergente sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

II. Est il possible qu'un signal non nul ait une énergie nulle ? Une puissance moyenne totale nulle ?

III. Soient deux signaux $x \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathbb{C}$ périodiques de période T. On définit la fonction d'inter-corrélation ϕ_{xy} par :

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

(a) Montrer que $\phi_{xy}(\tau)$ est périodique et se développe en série de Fourier à préciser ;

(b) Que représente $\phi_{xx}(0)$?

IV. On définit un système analogique en électronique par sa relation entrée $x(t)$ /sortie $y(t)$: $y(t) = x(t) * h(t)$ où $h(t)$ représente la réponse "impulsionnelle" du système.

(a) Quelle est la limite de $h(t)$ à l'infini ? on suppose $h(t)$ sommable

(b) Montrer que lorsque le signal $x(t)$ est borné et $h(t)$ est *sommable*, alors le signal $y(t)$ est borné ;

(c) Soit le signal $x(t) = \text{sign}\,[h(-t)]$ Montrer que si $h(t)$ *n'est pas sommable*, $y(t)$ n'est pas toujours défini (prendre par exemple la valeur en 0). Commentaires ?

V. Montrer que :

(a) La TF d'un signal réel pair (resp. impair) est une fonction réelle paire (resp. impaire) ;

(b) La TF d'un signal complexe est une fonction réelle si la partie réelle dui signal est paire, et la partie imaginaire du signal est impaire.

VI. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x\,(1-x^2)|}} \qquad J = \int_{1}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}dx$$

VII. Soit la fonction $g(x) = \sin(x/2)$ de période 2π.

(a) Calculer le développement de g en série de Fourier ;

(b) Calculer la somme : $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

VIII. Calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^4 dt$$

IX. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général :

$$u_n(z) = \frac{(2n)!n^{2n}z^n}{2^n n!(3n)!}$$