# Examen de mathématiques L3/ESA - Décembre 2012

**I.** Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) dt \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt \quad K = \int_1^{+\infty} t^\alpha \left(1 - e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**II.** On considère la fonction $x(t)$ de période $2\pi$ définie sur l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ par : $x(t) = e^{j\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$

(a) Calculer les coefficients du développement de $x(t)$ en série de Fourier ;

(b) Montrer que :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$$

**III.** Soit un signal $s(t)$ d'énergie finie et $S(\nu)$ sa transformée de Fourier. Montrer que $\lim_{\nu \to \pm\infty} S(\nu) = 0$

**IV.** On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des signaux $s(t)$ définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient

$$\forall k, p, q \in \mathbb{N} \quad \lim_{t \to \pm\infty} t^{p+q} s^{(k)}(t) = 0$$

(a) Montrer que les signaux $t^p s^{(k)}(t)$ sont sommables ;

(b) Quelle est la transformée de Fourier inverse du signal $\nu^p S^{(k)}(\nu)$ ?

(c) *En déduire que $S(\nu) \in \mathcal{E}$. On rappelle la formule du binôme de Newton pour les dérivées d'un produit de deux signaux :*

$$(f(t)g(t))^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)}(t) g^{(n-i)}(t)$$

**V.** Calculer la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = e^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e^{-t}(1 - \cos t)\right)$