Examen de mathématiques L3/ESA - Janvier 2011

I. On suppose que $0 < \alpha < 1$ et $a > 0$. Etudiez la convergence des intégrales I, J et K (pour J on intégrera par parties en posant $u' = \cos x$ et $v = x^{-\alpha}$) :

$$I = \int_0^a \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \qquad J = \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

II. Les questions (b) et (c) sont indépendantes. Soit un signal $s(t)$ d'énergie finie :

(a) Montrer que sa transformée de Fourier $S(\nu)$ vérifie

$$\lim_{\nu \to \pm\infty} S(\nu) = 0$$

(b) Le signal $s(t)$ vérifie $\forall k, p, q \in \mathbb{N}$ $\lim_{t \to \pm\infty} t^{p+q} s^{(k)}(t) = 0$. Montrer que l'intégrale I converge :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| t^p s^{(k)}(t) \right| dt$$

(c) Quelle est l'expression de la transformée de Fourier **inverse** des signaux i) $S^{(k)}(\nu)$ ii) $\nu^p S^{(k)}(\nu)$ en fonction du signal $s(t)$ (et/ou de ses dérivées à un facteur multiplicatif près) ?

III. Soit une fonction $f(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $F(\nu)$ sa TF. Montrer que :

(a) Si f est paire : $F(\nu) = 2. \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(2\pi\nu t) dt$

(b) Si f est impaire : $F(\nu) = -2j. \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(2\pi\nu t) dt$

(c) Utilise ce(s) résultat(s) pour calculer la TF de la fonction $x(t)$ définie par :

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{si } |t| < 1 \,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

IV. On considère la fonction $x(t)$ de période 2π définie sur l'intervalle $[-\pi, +\pi[$ par : $x(t) = e^{j\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$

(a) Calculer les coefficients du développement de $x(t)$ en série de Fourier ;

(b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$$

V. Montrer le "théorème de la valeur finale" portant sur les transformées de Laplace.

VI. Soit l'équation d'une corde vibrante d'une fonction séparable $u(x,t) = f(x)g(t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a \neq 0$$

(a) Montrer que $f(x)$ et $g(t)$ vérifient la relation :

$$\frac{g''(t)}{a^2 g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}$$

On supposera dans la suite que ces deux quantités sont égales à $\lambda < 0$

(b) En posant $\lambda = -\omega^2$ quelles sont les expressions de $g(t)$ et $f(x)$ en fonction de $A = g(0)$, $B = g'(0)$, $C = f(0)$, $D = f'(0)$?

(c) On donne les conditions initiales $u(0,t) = 0$ $\forall t$ et $u(l,t) = 0$ $\forall t$ avec l valeur constante (longueur de la corde). En déduire qu'une solution particulière est de la forme :

$$u(x,t) = \alpha \cos\left(\frac{k\pi a t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + \beta \sin\left(\frac{k\pi a t}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

VII. Développer en série entière, en précisant le rayon de convergence, les fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad f(x) = \log(2+x)$$