Examen de mathématiques L3/ESA - Janvier 2012

I. Soit une fonction $f(x)$ de TF $F(\nu)$. On considère la transformée $f_B(x)$ obtenue en tronquant le spectre de $f(x)$: $f_B(x) = \int_{-B}^{+B} F(\nu)e^{+2\pi\nu x}d\nu$

(a) Montrer que $f_B(x)$ peut s'écrire (écrire la TF de $f_B(x)$) : $f_B(x) = f(x) * \frac{\sin 2\pi Bx}{\pi x}$

(b) Calculer l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{\pi x} dx$

(c) On suppose que $f(x)$ admette une discontinuité en 0. Dans ce cas, $f(x)$ s'écrit : $f(x) = g(x) + \alpha\Gamma(x)$ où g est une fonction continue et Γ l'échelon. En utilisant le résultat précédent et des changements de variables adéquats, montrez que :

$$f_B(x) = g(x) * \frac{\sin 2\pi Bx}{\pi x} + \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Si}(2\pi Bx)\right) \qquad \text{avec } \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$$

II. (a) Donner un développement en série entière de $\log(1+x)$;

(b) Déterminer les rayons de convergence et la somme de la série entière de terme général : $u_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{nx^n}{(n+1)(n+2)}$ On remarquera que $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ se décompose sous la forme $\frac{a}{(n+1)} + \frac{b}{(n+1)}$ (a et b à déterminer).

III. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $g(t) = e^t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(e^{-t}(1-\cos t)\right)$

IV. Soit $x(t)$ un signal admettant une transformée de Fourier $X(\nu)$ **à support borné** sur $[-B,+B]$.

(a) Montrer que la dérivée de $x(t)$ s'exprime : $\frac{\partial x}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\nu)X(\nu)e^{2j\pi\nu\left(t-\frac{1}{4B}\right)}d\nu$ avec $A(\nu) = 2j\pi\nu e^{\frac{j\pi\nu}{2B}}\mathrm{rect}_{2B}(\nu)$

(b) Développer $A(\nu)$ en série de Fourier sur $[-B,+B]$ (on le supposera périodique de période $2B$).

(c) En déduire : $\frac{\partial x}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{8B(-1)^{k+1}}{\pi(1-2k)^2}x(t - 1/4B + k/2B)$

V. En considérant une suite d'impulsions rectangulaires de largeur τ et de période T, montrer que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\tau}{T}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n\tau}{T}\right) = 1$$

VI. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+1}} \qquad J = \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x dx}{x^2+1}$$