Examen de mathématiques L3/ESA - Janvier 2013

I. On donne la fonction suivante $f(x) = e^{-2\pi|x|}$

(a) Calculez la transformée de Fourier de $f(x)$;

(b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = 1/(1+x^2)$ (propriétés des TF ...) ;

(c) Calculez $f * f$ et en déduire la transformée de Fourier de la fonction $1/(1+x^2)^2$;

(d) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = x/(1+x^2)^2$.

II. Calculer la série de Fourier du signal $f(t)$ périodique de période $2T$ défini par : $f(t) = |t| \ \forall \ t \in [-T, +T]$ puis l'écrire comme somme de sinusoïdes.

III. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$$f(t) = e^{-2t}\cos^2 3t - 3t^2 e^{3t} \quad g(t) = e^t \frac{d^{100}}{dt^{100}}\left(e^{-t}t^{100}\right) \text{ (remarque : } \frac{d^m}{dt^m}\left(e^{-t}t^{100}\right) \text{ pour } t = 0 \text{ et } 0 \leq m \leq 99)$$

IV. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$f''(t) + k^2 f(t) = 2\sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

(a) En considérant le cas $k \neq \omega$;

(b) Calculer la TL inverse de la fonction $1/(p^2+\omega^2)^2$ (par ex. produit de convolution).

(c) Résoudre l'équation lorsque $k = \omega$.

V. La réponse fréquentielle d'un système numérique peut s'exprimer sous la forme d'une série entière $H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^{-n}$ On suppose que cette série converge pour $|z| = 1$. D'autre part, nous supposons que $H(z)$ est une fraction rationnelle en z. Montrer que les **pôles** de $H(z)$ se trouve à l'intérieur du cercle de rayon 1 de centre O.

VI. Soit la fonction $f_n(x) = \sin\left(x + \frac{x}{n}\right)$ définie sur $[0, 2\pi]$.

(a) Montrer que $f_n(x)$ converge simplement vers une fonction $f(x)$ à préciser ;

(b) Soit la fonction $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$. Montrer que pour $n \geq 2$, $g_n(x) \leq 2\sin(\pi/n)$. $f_n(x)$ converge t-elle uniformément ?

(c) En calculant $f(n\pi/2)$ et $f_n(n\pi/2)$ montrer que $f_n(x)$ n'est uniformément convergente sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

VII. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général :

$$u_n(z) = \frac{(2n)!\,n^{2n} z^n}{2^n n!(3n)!}$$

VIII. Étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{t(t+2)} dt$$