Examen de mathématiques L3/ESA - Juin 2009

1. Parmi les fonctions suivantes, déterminez $f(t)$ tel que $L[f(t)](p) = F(p)$ (pour F_2 on pensera notamment à la dérivée) :

$$F_1(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)} \quad F_2(p) = \ln\left(\frac{p^2+a^2}{p^2}\right)$$

2. Calculer l'intégrale suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$$I = \int_0^{\infty} t\cos t e^{-3t} dt$$

3. Soient f et g telles que :$f(t) = t.g(t)$. On note respectivement $F(p)$ et $G(p)$ les TL de f et g.
   (a) Quelle est la relation entre $F(p)$ et $G(p)$. On supposera que le domaine de définition de G est $\{Re(p) > x_0\}$
   (b) En admettant la propriété suivante : $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$, en déduire :

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](x) = \int_x^{+\infty} F(x)dx \qquad x > x_0, x \in \mathbb{R}$$

   (c) En déduire :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^t - e^{-\lambda t}}{t} dt$$

4. Déterminer le rayon de convergence, puis calculer les séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 0}(3n+1)x^{3n} \qquad \sum_{n\geq 0}(2^n+3^n)x^n$$

5. (a) Etudier la convergence uniforme et la convergence simple des fonctions suivantes définies sur $[0,1]$:

$$f_n(x) = x^n(1-x) \qquad g_n(x) = (-1)^n x^n(1-x)$$

   (b) Etudier la convergence **simple** de la fonction sur $[0,1]$:

$$h_n(x) = x^n \sin \pi x$$

   (c) Montrer que $|\sin \pi x| \leq |\pi x|$ puis en utilisant $\sin \pi x = \sin \pi(1-x)$ (à montrer) majorer $|h_n(x)|$.
   (d) $h_n(x)$ est elle uniformément convergente ?

6. Série de Fourier :
   (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π périodique définie sur l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in]-\pi, 0]; \\ 1, & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

   (b) En utilisant la valeur de $f(x)$ en $\pi/2$ déduire la somme suivante :

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

   (c) Calculer :

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$