Examen de mathématiques L3/ESA - Juin 2011

I. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le t \le n \\ 0 & \text{si } t \ge n \end{cases}$$

(a) Quelle est la limite simple de cette fonction ?

(b) Montrer que $\forall t > -1, \ln(1+t) \le t$. En déduire : $0 \le f_n(t) \le e^{-t}$

(c) $f_n(t)$ *est-elle uniformément convergente sur* $\mathbb{R}^+$ *?*

II. Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) dt \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt \quad K = \int_1^{+\infty} t^\alpha \left(1 - e^{\frac{-1}{\sqrt{t}}}\right) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

III. Développer en série la fonction $f(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ pensez à la dérivée

IV. Soit la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$

(a) Trouver une équation différentielle vérifiée par $f(x)$ de la forme : $f'(x) + a(x)f(x) = 0$

(b) Donner la TF de cette équation différentielle ;

(c) Montrer que $F(\nu) = Ae^{-\pi\nu^2}$ est une solution de la TF de l'équation. Trouver A sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$$

(d) En déduire la TF de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}$$

V. Montrer que la TF d'un produit est un produit de convolution ;

VI. On considère la fonction $x(t) = sign(a(t)\cos(2\pi\nu_0 t))$ avec $a(t) < 0$.

(a) Montrer que cette fonction est développable en série de Fourier et calculer ses coefficients.

(b) Peut on retrouver $\cos(2\pi\nu_0 t)$ par un filtrage approprié ?

VII. La réponse fréquentielle d'un système numérique peut également s'exprimer sous la forme d'une série entière $H(z)$ dont le terme général est de la forme $u_n(z) = \alpha_n z^{-n}$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^{-n}$$

On suppose que cette série converge pour $|z| = 1$. D'autre part, nous supposons que $H(z)$ est une fraction rationnelle en z. Montrer que les *pôles* de $H(z)$ se trouve à l'intérieur du cercle de rayon 1 de centre O.