Université de Strasbourg

Octobre 2014

Licence de Physique 1re année
Licence de Sciences pour l'Ingénieur 1re année
Licence de Physique Chimie 1re année

Contrôle Continu de Mécanique n° 1

Aucun document n'est autorisé. Aucune calculatrice n'est autorisée.

Durée 1 heure

Exercice 1

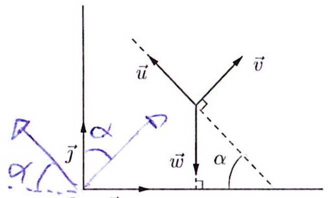
Soit M, un point matériel défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). Calculer dans chaque cas défini ci-dessous, les coordonnées cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{a}$ du point M.

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t)e^{\alpha t} \\ y(t) = R\sin(\omega t)e^{\alpha t} \\ z(t) = Re^{\alpha t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = R\cos(\sqrt{\omega t + \varphi}) \\ y(t) = R\sin(\sqrt{\omega t + \varphi}) \\ z(t) = R\omega t \end{cases}$$

où les quantités : R, α, ω et φ sont des constantes.

Exercice 2

On considère le repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs unitaires tels que



où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{\imath}$.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction de α.
2. Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$
3. On pose $\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$.
   (a) En justifiant votre réponse indiquer si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe.
   (b) Préciser l'orientation du vecteur $\vec{k}$.
4. Calculer les vecteurs $\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{v}$ et $\vec{b} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ et les exprimer dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
5. Calculer $\|\vec{b}\|$.

Exercice 3

Un point matériel M assujetti à un mouvement plan décrit à vitesse angulaire constante ω une trajectoire définie par l'équation en coordonnées polaires :

$$\rho = r_0(1 + \cos(\omega t)) \quad \text{et} \quad \theta = \omega t$$

où ρ et θ sont les coordonnées polaires de M et r_0 une constante. On notera $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ la base locale polaire.

1. Donner les dimensions de r_0 et de ω.
2. Calculer dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes de $\vec{v}$, vecteur vitesse de M. On exprimera $\vec{v}$ en fonction de ω et r_0.
3. Montrer que $\|\vec{v}\| = \omega\sqrt{2r_0\rho}$.
4. Calculer dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ les composantes de $\vec{a}$, vecteur accélération de M.

Exercice 4

Les coordonnées d'un point matériel M dans le référentiel fixe $\mathscr{R}$ muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha\left[\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 - 4\left(\dfrac{t}{\tau}\right) + 1\right], \\ y(t) = -2\alpha\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4, \\ z(t) = 3\alpha\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 \end{cases}$$

où τ et α sont des constantes.

Dans un deuxième référentiel $\mathscr{R}'$, mobile par rapport à $\mathscr{R}$ et muni du repère $(O', \vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ avec $\vec{\imath} = \vec{\imath}'$, $\vec{\jmath} = \vec{\jmath}'$ et $\vec{k} = \vec{k}'$, elles ont pour expression :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha\left[\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{t}{\tau}\right) + 2\right], \\ y'(t) = \alpha\left[5 - 2\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^4\right], \\ z'(t) = 3\alpha\left[\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2 - 7\right]. \end{cases}$$

1. Quelles sont les dimensions de τ et de α ?
2. Déterminer $\vec{v}_{\mathscr{R}}$, la vitesse de M dans $\mathscr{R}$, et $\vec{v}_{\mathscr{R}'}$, la vitesse de M dans $\mathscr{R}'$.
3. En déduire les composantes de la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ du point M.
4. Calculer $\vec{a}_{\mathscr{R}}$ et $\vec{a}_{\mathscr{R}'}$ les accélérations respectives de M dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$.
5. En déduire l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$ du point M.
6. Donner la nature du mouvement d'entraînement.
7. Calculer l'accélération de Coriolis de M.