Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI

Année 2011-2012
Durée 1 heure

Contrôle continu du cours Méthodes Mathématiques de la Physique

(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)

(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$, *b)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, *c)* $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Exercice 2

Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, *b)* $f(x) = \cos^2(3x^2-1)$, *c)* $f(t) = \cos(\omega t)\, e^{-\gamma t}$,

d) $f(x) = \arccos x$, *e)* $f(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$, *f)* $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Exercice 3

On étudie les opérateurs vectoriels *gradient*, *divergence*, *rotationel* et *Laplacien* dans différents systèmes de coordonnées :

a) Donner les définitions de ces opérateurs vectoriels agissant sur une fonction scalaire $f(x,y,z)$ ou une fonction vectorielle $\vec{F}(x,y,z)$ exprimées en coordonnées cartésiennes.

b) En utilisant l'expression en coordonnées cartésiennes des opérateurs vectoriels *divergence* et *gradient* démontrer que

$$\text{div}\left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right] = \vec{\nabla}\cdot\left[\vec{\nabla} f(\vec{r})\right] = \Delta f(\vec{r}) .$$

c) On veut déterminer les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, et $\vec{e}_\varphi$ dans un système de coordonnées sphériques.

1) Donner les lois de transformation des coordonnées cartésiennes en fonctions des coordonnées sphériques r, θ et φ.

2) Les vecteurs unitaires dans le système de coordonnées sphériques sont donnés par

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} , \quad \vec{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} , \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \quad \text{avec} \quad h_r = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|, \; h_\theta = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|, \; h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| .$$

En utilisant le résultat de 1) calculer les dérivées partielles premières de $\vec{r}$ par rapport aux coordonnées r, θ et φ et déterminer ainsi les *facteurs d'échelle* h_r , h_θ et h_φ ainsi que les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.

3) D'après l'un des théorème du cours on sait que le gradient d'une fonction scalaire $f(\vec{r})$ qui s'exprime à travers des coordonnées orthogonales (u,v,w) est donné par

$$\text{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w .$$

Utiliser ce résultat pour écrire $\vec{\nabla} f$ en coordonnées sphériques.