Université de Strasbourg
Licence 1ère année PSI

Année 2012-2013
Durée 1 heure

Contrôle continu du cours Méthodes Mathématiques de la Physique
(Calculettes et portables non autorisés, documents non autorisés)
(Tout résultat non justifié sera considéré comme inexistant)

Exercice 1 (4 points)

Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4}\ , \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)\ , \qquad c)\ \lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3}\ .$$

Exercice 2 (6 points)

Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x) = \frac{3x-2}{x^2}\ , \qquad b)\ f(x) = \sin^2(5x^2-1)\ , \qquad c)\ f(x) = \ln\left[\cos^2(\frac{x}{2})\right]\ ,$$

$$d)\ f(x) = \arctan x\ , \qquad e)\ f(x,y) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)\ , \qquad f)\ r(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ .$$

Exercice 3 (10 points)

On étudie les opérateurs *gradient*, *divergence* et *Laplacien* dans différents systèmes de coordonnées :

a) Donner les définitions de ces opérateurs agissant sur une fonction scalaire $f(x,y,z)$ ou une fonction vectorielle $\vec{F}(x,y,z)$ exprimées en coordonnées cartésiennes.

b) En utilisant l'expression en coordonnées cartésiennes de ces opérateurs démontrer que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \Delta f\ .$$

c) D'après les théorèmes du cours on sait que le gradient d'une fonction scalaire f qui s'exprime à travers des coordonnées orthogonales (u,v,w) est donné par

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w$$

et la divergence d'une fonction vectorielle $\vec{F}$ exprimée dans ces mêmes coordonnées

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(F_v h_w h_u) + \frac{\partial}{\partial w}(F_w h_u h_v)\right]$$

où F_u, F_v et F_w sont les composantes de la fonction $\vec{F}$ en direction des vecteurs unitaires $\vec{e}_u$, $\vec{e}_v$ et $\vec{e}_w$. Ces vecteurs s'expriment comme

$$\vec{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\ , \quad \vec{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\ , \quad \vec{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial\vec{r}}{\partial w} \qquad \text{avec} \qquad h_u = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}|\ , \quad h_v = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}|\ , \quad h_w = |\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}|\ .$$

Pour trouver l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques on utilisera les équations de transformation

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi \;, \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi \;, \qquad x = r\,\cos\theta$$

pour calculer les dérivées partielles $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$, puis les facteurs d'échelle h_r, h_θ et h_φ ainsi que les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$.

Finalement on appliquera les expressions de $\vec{\nabla} f$ et $\operatorname{div}\vec{F}$ données ci-dessus pour calculer le Laplacien de la fonction scalaire f en coordonnées sphériques.