UNIVERSITE de Strasbourg
Mention: PSI
Licence Sciences 1ère année

Juin 2010

EXAMEN DE L'OPTION "METHODES MATHEMATIQUES"

(Durée: 1:30 heures)

Problème 1

Donner les dérivées premières des fonctions suivantes:

a) $f(x) = \sqrt{x}\,(2x-3)$

b) $f(x) = \frac{4x+1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

d) $f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}$

e) $f(x,y) = \ln(2\,x^2 - 8)$

Problème 2

Résoudre les intégrales suvantes et vérifier par dérivation l'exactitude du résultat trouvé:

a) $\displaystyle\int 2\,x\,e^{-x^2}\,dx$ (intégration par substitution)

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ (intégration par substitution)

c) $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx$ (intégration par parties)

d) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-1}\,dx$

Problème 3

a) Démontrer que la série $\displaystyle S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

b) En utilisant le fait que pour des x positifs $\ln x < x$ et $\frac{1}{2\,x^3-1} < \frac{1}{x^3}$, et avec le résultat de la partie a) étudier la convergence de la série

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2\,n^3-1}\,.$$

Problème 4

Donner la solution générale de l'équation différentielle inhomogène

$$4\,x^2\,f''(x) - 4\,x\,f'(x) - 5\,f(x) = -10\,x^2\,.$$

Commencer par trouver des solutions de l'équation différentielle homogène sous la forme de puissances de la variable x, c.à.d. sous la forme $f(x) = x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ (si necessaire deviner les solutions avec α entier ou semi-entier). Trouver ensuite une solution de l'équation différentielle inhomogène et construire la solution qui satisfait aux conditions initiales

$$f(x=4) = 8, \qquad f'(x=4) = -5\,.$$