UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

L2-Physique

Méthodes mathématiques pour la physique

Session de janvier 2011

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

On fera l'exercice 1 et au choix l'exercice 2 ou 3

Exercice 1

1 Étudier la convergence des intégrales suivantes (on ne demande pas de les calculer)

$$1.\text{a} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3+x+1}\,\mathrm{dx} \quad 1.\text{b} \quad \int_0^{2} \frac{x}{x-\sin x}\,\mathrm{dx} \quad 1.\text{c} \quad \int_0^{+\infty} (1-e^{-x^2})\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{dx}.$$

On admettra que la fonction $(1-e^{-x^2})$ est postitive sur $\mathbb{R}^+$.

2 Justifier la convergence des intégrales suivantes que l'on calculera (pour 2.b, on établira le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$).

$$2.\text{a} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{dx} \quad 2.\text{b} \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{dx}.$$

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (x-y+z, x+y, 2x+z).$$

1 Montrer que f est une application linéaire.

2 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$.

3 Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

4 L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

5 On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3).$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$ et calculer les images de H et G par f.

Exercice 3

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(e_1) = e_1+e_2+e_3, \quad f(e_2) = e_1+e_2+2e_3, \quad f(e_3) = e_2+3e_3.$$

1 Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2 Calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.

3 Soit g une application linéaire dont la matrice représentative dans la base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice représentative de f dans la base $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. En déduire $A^n, n \in \mathbb{N}$.

Fin de l'épreuve