UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

L2-Physique

Méthodes mathématiques pour la physique

Session de juin 2011

Documents, calculatrice et téléphones portables interdits

Exercice 1

1 Étudier la convergence des intégrales suivantes (on ne demande pas de les calculer)

$$1.a \quad \int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^3+1} \quad 1.b \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx \quad 1.c \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{x}dx\ .$$

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-y, x-z).$$

1 Montrer que f est une application linéaire.

2 On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$.

3 Calculer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

4 Calculer M la matrice représentative de l'application f dans la base $\mathcal{B}$. Calculer le déterminant de M.

4 L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

5 On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y+z=0\right\} \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2 + e_3).$$

5.1 Quelles sont les dimensions de H et G ?

5.2 Donner une base de F et G.

5.2 On note (ϵ_1, ϵ_2) une base de H et (ϵ_3) une base de G. Exprimer $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). En déduire que $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$.

5.3 Calculer les images de H et G par f.

Fin de l'épreuve